Ob 8

SPRAWOZDANIA SZKOLNE
Książnica Kopernikańska w Toruniu
SCHULPROGRAMME

Programm

der

städtischen Realschule zu Bromberg

durch welches

zu der öffentlichen Prüfung

am 21. März 1864

ehrerbietigst einladet

der

Director Dr. Gerber.

Inhalt: 1) Theorie der gradlinigen Strahlensysteme des Lichts. Von **Dr. R. Meibauer.**
2) Schulnachrichten, vom Director.

Bromberg, 1864.
Buchdruckerei von F. Fischer.

KSIĄŻNICA MIEJSKA
IM. KOPERNIKA
W TORUNIU

Stadtbibliothek
Thorn

aB 1752

Theorie der gradlinigen Strahlensysteme des Lichts, eine Erweiterung der Gauss'schen Theorie vom Krümmungsmaasse der Flächen.

Capitel I. Einleitung.

§. I. Historische Einleitung.

1) Strahlensysteme des Lichts in Mitteln, deren elementare Wellenfläche die Kugel ist.

Der Erste, welcher sich mit Strahlensystemen beschäftigte, war Tschirnausen 1682. Er bemerkte die Brennlinie, welche durch Reflexion paralleler Strahlen in einem Kreise entsteht; die Gleichung aber, welche er dafür aufstellte, war, wie die Commissäre der Pariser Akademie Cassini, Mariotte und de la Hire zeigten, fehlerhaft. Dieser erste fruchtlose Versuch zog die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf diese Art von Curven, welche man bald als den Schlüssel aller dioptrischen und katoptrischen Geheimnisse erkannte. Männer wie Bernouilli, l'Hôpital, Carré behandelten allgemeiner ein Strahlensystem in der Ebne, welches dadurch entsteht, dass parallele, oder von einem Punkte ausgehende Strahlen an einer beliebigen Curve gespiegelt oder gebrochen werden, und gaben Methoden an zur Berechnung der kaustischen Curve, welche im Allgemeinen aus zwei getrennten Zweigen besteht. [1]) Sie ist sehr complicirter Natur; aber Quetelet [2]) zeigte, dass sie von leicht construirbaren Epicycloiden abgewickelt werde, die gewöhnlich viel einfacher sind und dieselben Dienste leisten.

---

[1]) Die geometrische Construction derjenigen Strahlensysteme dieser Art und ihrer Brennlinien, welche durch 1, 2, 3 oder 4 ebne oder sphärische Flächen gespiegelt oder gebrochen werden, findet sich in den optischen Tafeln von Schellbach und Engel.

[2]) Mémoires de l'Acad. de Bruxelles III.

Malus [1]) begann 1810 zuerst eine Theorie derartiger Strahlensysteme im Raume, welche Dupin, [2]) Hamilton [3]) und Gergonne [4]) ausbauten. Die spiegelnde oder brechende Curve wurde nun zur Fläche und jene beiden Zweige der Brennlinie zu zwei Schalen einer Brennfläche, die von allen Strahlen des Systems berührt werden, und auf denen die ganze Dioptrik und Katoptrik beruht. Das Hauptresultat war folgender zuerst von Malus aufgestellter Satz:

Wenn es für solche Strahlen eine Fläche giebt, auf der sie sämmtlich senkrecht stehen, so behalten sie diese Eigenschaft, auf einer Fläche senkrecht zu sein, mögen sie auch noch so oft an beliebigen Flächen gespiegelt oder gebrochen werden.

Wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, sind das, in die Sprache der Undulationstheorie übersetzt, im Allgemeinen solche Systeme, die nur in Mitteln möglich sind, deren charakterisirende Elementarwelle die Kugel ist. Die meisten übrigen Sätze sind rein mathematischen Inhalts; für die Optik von Interesse ist eigentlich nur noch der, dass man jede beliebige Anzahl brechender oder spiegelnder Flächen durch eine einzige, bestimmte ersetzen kann, welche dieselbe Wirkung, wie alle zusammen, ausübt.

2) *Allgemeine Strahlensysteme des Lichts in beliebigen Mitteln.*

Wie interessant auch dieser specielle Fall sein mag, für die Theorie blieb doch die Untersuchung der gradlinigen Strahlensysteme, die keine alle Strahlen senkrecht schneidende Fläche besitzen, ganz allgemein und in einem durch irgend eine elementare Wellenfläche charakterisirten Mittel, von viel grösserer Wichtigkeit. Diese Untersuchung ist zuerst von Hamilton [5]) geführt worden.

Derselbe geht zu dem Zwecke aus von einer allgemeinen partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung mit 42 Coefficienten und 8 Veränderlichen, nämlich dem Ausgangspunkte (x, y, z) des beliebig gekrümmten Strahls, seinem Endpunkte (x', y', z'), der Farbe χ und einer das Mittel charakterisirenden Function V. Es gelingt ihm, die 42 Coefficienten auf 10 zu reduciren, welche er als gegebene Constanten betrachtet und in 4 Gruppen theilt. Diese liefern ihm 4 Probleme:

Im ersten sind x, y, z, x', y', z' gegeben, aber die Farbe χ ist variabel, und er macht kurz die chromatische Abweichung der verschiedenen, unendlich nahen Strahlen heterogenen Lichtes ab.

Auch das zweite Problem, wo χ constant ist, es sich also nur um homogenes Licht handelt, fertigt er mit wenig Worten ab.

---

[1]) XIVième cahier du journal de l'école polyt.

[2]) Développements de géométrie, mémoires III., IV.

[3]) Theory of systems of rays. Transact. of the Irish Ac. XV.

[4]) Annales de mathém. pur. et appl. XIV., XVI.

[5]) Supplements to an essay on the theory of Systems of Rays. Transact. of the royal Irish Acad. vol. XVI. pag. 7 und pag. 97.

Im dritten Problem sind die Farbe χ und der Anfangspunkt (x, y, z) gegeben, und er betrachtet ein Strahlensystem in seinen Endpunkten, nachdem es beliebig oft gebrochen ist. Namentlich untersucht er die Fläche, welche zu diesem Strahlensystem in den Endpunkten senkrecht steht und findet, dass die Differentialgleichung derselben nur dann die bekannte Bedingung der Integrirbarkeit erfüllt, also eine solche Fläche nur dann existirt, wenn die elementare Wellenfläche des Endmediums, die er mit V bezeichnet, eine Kugel ist, und dass alsdann die Strahlen auch im Anfangspunkte sämmtlich auf einer Fläche senkrecht stehen.

Dieses Problem ist der oben schon angeführte Malus'sche Satz.

Das vierte bezieht sich auf das Wechselverhältniss der Tangenten an den Strahlen im Anfangspunkte zu den Tangenten im Endpunkte. Indem Hamilton also statt der gekrümmten Strahlen ihre Tangenten betrachtet, handelt es sich eigentlich nur noch um gradlinige Strahlensysteme. In der That kann man ein Mittel, dessen Dichtigkeit oder chemische Natur nach irgend einem Gesetze variirt, in lauter homogene Schichten gleicher Brechbarkeit zerlegt denken.

In jeder dieser Schichten ist das Strahlensystem gradlinig. [1]) Auch wir gedenken uns auf gradlinige, einfarbige Lichtstrahlen in anisotropen Medien zu beschränken.

---

[1]) Pogg. Ann. 1833: Bd. XXVIII. pag. 633 u. Bd. XXIX. pag. 324; ferner: Phil. Mag. ser. III. vol. 2, pag. 284. Hamilton selbst spricht sich über den Inhalt seiner Untersuchungen in dem report of the first and second meetings of the British association for the advancement of science pag. 545 folgendermassen aus:

The general problem, that I have proposed to myself in optics, is to investigate the mathematical consequences of the law of least action: a general law of vision, in which are included, as it is well known, all the particular conditions of reflexion and refraction, gradual and sudden, ordinary and extraordinary. And the central idea from which my whole method flows, is the idea of one radical and characteristic relation for each optical system of rays, that is, for each combination of straight or bent, or curved paths, along which light is supposed to be propagated according to the law of least action. This characteristic relation, being different for different systems, and being such that the mathematical properties of the system can all be deduced from it.

— — — In the relation contemplated by me the related things are, in general, in number, eight: of which, six are elements of position of two variable points of space, considered as visually connected, the seventh is an index of colour; and the eighth which I call the characteristic function, — because I find, that in the manner of its dependence on the seven foregoing are involved all the properties of the system, — is the action between the two variable points, the word action being used here in the same sense as in the known law of vision, which has been already mentioned.

I have assigned, for the variation of this characteristic function, corresponding to any infinitesimal variations in the positions on which it depends, a fundamental formula; and I consider as reducible to the study of this one characteristic function, by means of this one fundamental formula, all the problems of mathematical

Vielleicht hat der bedeutende Aufwand von analytischem Apparat und geometrischen Hülfsmitteln abgeschreckt, denn die Theorie gerieth seit Hamilton in Vergessenheit. Erst in neuester Zeit nahm sie Kummer wieder auf und veröffentlichte eine Theorie der gradlinigen mathematischen Strahlensysteme, [1]) in denen die optisch möglichen als specieller Fall mit enthalten sind.

Er bestimmt einen Strahl durch die Cosinus ξ, η, ζ der Winkel, welche er mit den Coordinatenaxen macht, und durch denjenigen Punkt (x, y, z) der sogenannten Ausgangsfläche des Strahlensystems, durch welchen der Strahl geht. Alsdann betrachtet er diese 6 Variabeln als Functionen zweier neuer unabhängigen Variabeln u und v und führt nach Gauss als Bezeichnungen für die partiellen Differentialquotienten ein:

(1.) $$dx = adu + a'dv,\ dy = bdu + b'dv,\ dz = cdu + c'dv.$$

Daraus bildet er die Gauss'schen Functionen A, B, C; D, E, F. Diesem analog setzt er:

(2.) $$d\xi = \mathfrak{a}du + \mathfrak{a}'dv\ d\eta = \mathfrak{b}du + \mathfrak{b}'dv,\ d\zeta = \mathfrak{c}du + \mathfrak{c}'dv$$

und berechnet ebenso daraus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$.

Mit Hülfe dieser und einiger anderen Functionen erforscht er die Theorie der mathematischen Strahlensysteme. Davon wird noch unten im mathematischen Theile dieser Einleitung die Rede sein.

In letzter Zeit hat er nun auch die Frage behandelt, welche von den allgemeinen mathematischen Strahlen denn auch als optisch mögliche nach den Eigenschaften des Lichts wirklich in der Natur vorkommen und der Berliner Akademie der Wissenschaften folgenden, auch den Malus'schen Satz als speciellen Fall einschliessenden optischen Satz mitgetheilt. [2])

Jedes unendlich dünne, optische Strahlenbündel im Innern eines homogenen, durchsichtigen Mittels hat die Eigenschaft, dass seine beiden Focalebnen aus der diesem Mittel angehörenden Wellenfläche des Lichts, deren Mittelpunkt in der Axe des Strahlenbündels liegend angenommen wird, zwei Curven ausschneidet, welche sich in conjugirten Richtungen schneiden. Auch ist jedes Strahlenbündel, welches diese Eigenschaft hat, wirklich optisch darstellbar.

Für diesen scheinbar verwickelten Satz und seine merkwürdigen Folgerungen hatten wir bisher keinen Beweis. In der folgenden Abhandlung wird jener als die eine Seite eines

---

optics, respecting all imaginable imaginations of mirrors, lenses, crystals and athmospheres. And though among these problems of mathematical optics, it is not here intended to include investigations respecting the phenomena of interference, yet it is to perceive from the nature of the quantity, which I have called the characteristic function, and which in the hypothesis of undulation is the time of propagation of light from one variable point to an other, that the study of this function must be useful in such investigations also. My own researches, however, have been hitherto chiefly directed to the consequences of the law of least action, and to the properties of optical systems, and systems of rays in general.

[1]) Crelle's Journal Bd. 57.

[2]) Monatsberichte der Akad. der Wissenschaften zu Berlin vom 30. Juli 1860.

weit allgemeineren Satzes auftreten, dessen andere Seite eine gleiche Reihe interessanter Folgerungen bietet, und erst wenn man beide Seiten zusammenfasst, erhebt man sich zur einfachen Allgemeinheit.

Immer mehr und mehr verwachsen Optik und Theorie der krummen Oberflächen in einander, und diese ist für die Optik schon eben so unentbehrlich als die Infinitesimalrechnung geworden.

Wir wollen uns daher im nächsten Paragraphen einige für die Optik unentbehrlichen Lehren aus der Theorie der Flächen in's Gedächtniss zurückrufen und sodann auf die unendlich dünnen Strahlenbündel eingehen.

§ 2. Mathematische Einleitung.

3) Die Krümmung der Flächen nach Dupin.

Bekanntlich lässt sich die Krümmung der Flächen entweder mit Hülfe der Euler'schen Hauptkrümmungsradien discutiren, wobei besonders die Normalen der Flächen in's Auge gefasst werden, oder mittels des Gauss'schen Krümmungsmaasses, das sich auf eine Hülfskugel mit dem Radius = 1 bezieht, oder endlich durch Anwendung der Dupin'schen Indicatrix, wo von den Eigenschaften der Tangentialebne ausgegangen wird. Die Euler'sche Methode ist mit Vortheil nur bei Strahlen anwendbar, die alle senkrecht zu einer Fläche stehen; die Gauss'sche würde unmittelbaren Werth nur für Medien haben, deren elementare Wellenfläche die Kugel ist, und lässt freilich für andere Medien eine sehr schätzbare Verallgemeinerung zu; die Dupin'sche Betrachtungsweise dagegen ist für die Theorie der Strahlensysteme von der grössten Wichtigkeit, eben weil sie sich auf Tangentialebnen stützt, und wie oft hat man nicht an die elementare Wellenfläche des Lichts Tangentialebnen zu legen. Ich werde diese Methode[1]) kurz erläutern.

Legt man an irgend einen Punkt (x, y, z) einer krummen Fläche eine Tangentialebne, so werden die der Tangentialebne parallelen Ebnen Curven ausschneiden, deren Grad von der Natur der krummen Fläche abhängt. Unter dieser Schar paralleler Ebnen zeichnen sich aber die beiden der Tangentialebne unendlich nahen Ebnen aus. Diese schneiden nämlich aus der Fläche stets einen unendlich kleinen Kegelschnitt aus, Indicatrix[2]) des Punktes (x, y, z) genannt. In concav-concaven Punkten der Fläche, wo bekanntlich für die zweiten partiellen Differentialcoefficienten r, s, t die Ungleichung $s^2 - rt < 0$ gilt, liegt die Fläche ganz auf der einen Seite der Tangentialebne. Von den beiden dieser unendlich nahen und parallelen Ebnen hat daher die eine mit der Fläche gar keinen, nur einen imaginären Durchschnitt; die andere schneidet aber, wie Dupin gezeigt hat, eine reale Ellipse aus.

Ist die Fläche concav-convex, also $s^2 - rt > 0$, so liegt sie auf beiden Seiten der

---

[1]) Charles Dupin, Développements de Géométrie mémoires I. et II.

[2]) Cournot, Théorie des fonctions I., pag. 488. L'indicatrice résulte de l'intersection de la surface par deux plans infiniment voisins, tous deux parallèles au plan tangent et entre lesquels celui ci se trouverait compris.

Tangentialebne und jede der beiden unendlich nahen Parallelebnen schneidet eine Hyperbel aus. Es bleibt noch der Fall, wo $s^2 - rt = o$ ist. Wir haben es alsdann im Punkte (x, y, z) mit einer Abwickelbaren zu thun. Nur die eine der beiden Parallelebnen, welche der Tangentialebne unendlich nahe sind, trifft die Fläche und schneidet eine reale, unendlich kleine Parabel aus; für die andere existirt nur ein imaginärer Durchschnitt.

Diese unendlich kleinen Kegelschnitte haben alle Eigenschaften gewöhnlicher Kegelschnitte und besitzen auch conjugirte Durchmesser.

Jeder Durchmesser der Indicatrix ist Tangente an der Fläche, und die conjugirten Durchmesser sind conjugirte Tangenten der Fläche.

Gehen wir von unserer Tangentialebne in (x, y, z) auf der Fläche in irgend einer durch $\frac{dy}{dx}$ bestimmten Richtung zu einer benachbarten Tangentialebne über, so schneiden sich beide Ebnen in einer Graden, deren Richtung durch $\frac{\delta y}{\delta x}$ bestimmt werde.

Die durch $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{\delta y}{\delta x}$ bestimmten Richtungen sind nun stets conjugirte Durchmesser der Indicatrix, also conjugirte Tangenten. Sind r, s, t die zweiten partiellen Differentialcoefficienten des Punktes (x, y, z) auf der Fläche, so giebt Dupin als Gleichung solcher conjugirten Richtungen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{r + s\frac{\delta y}{\delta x}}{s + t\frac{\delta y}{\delta x}} \tag{3.}$$

4) Die unendlich dünnen mathematischen Strahlenbündel.

Wir werden später die Strahlensysteme als eine Summe einzelner, unendlich dünner Strahlenbündel auffassen, deren Eigenschaften untersuchen und sie dann wieder zu Systemen vereinigen. Wir wollen uns daher hier über die Benennung der einzelnen Theile eines unendlich dünnen Strahlenbündels verständigen:

Ein unendlich dünnes Strahlenbündel ist jeder Theil eines Strahlensystems, der einen bestimmten Strahl, Axe genannt, sammt allen ihn umgebenden, unendlich nahen umfasst. Die Kummer'schen Fusspunkte der kürzesten Abstände der Axe von den benachbarten Strahlen (Bei Hamilton: Foci by projection) liegen sämmtlich in einem bestimmten Theile der Axe, welcher durch die beiden Grenzpunkte der kürzesten Abstände (Foci of extreme projection) begrenzt wird. Die kürzesten Abstände in diesen beiden Grenzpunkten bilden einen rechten Winkel miteinander, und diejenigen beiden Ebnen, welche durch je einen dieser beiden kürzesten Abstände in den Grenzpunkten und die Axe des Bündels gehen, heissen Hauptebnen (Planes of extreme projection). Ferner giebt es in der Axe eines jeden unendlich dünnen Strahlenbündels im Allgemeinen zwei Punkte, die Brennpunkte, wo ein benachbarter Strahl seine Axe schneidet. Die beiden Ebnen, in welchen die Axe von einem unendlich nahen Strahle geschnitten werden, sind die Focalebnen (Planes of vergency, Hamilton). Eine zur Axe senkrechte Ebne schneidet aus dem Bündel eine kleine geschlossene

Curve aus. Diese Curve artet in den beiden Brennpunkten zu einer Graden, einem gradlinigen Querschnitte (Guiding line) aus, durch welche sämmtliche Strahlen hindurch gehen, und welche in den Focalebnen liegen. Der Winkel zwischen den gradlinigen Querschnitten wird durch den Winkel zwischen den Focalebnen gemessen. — Wie das ganze Strahlensystem aus lauter unendlich dünnen Bündeln bestehend betrachtet werden kann, so geben die beiden gradlinigen Querschnitte die Elemente zu den beiden Schalen der Brennfläche ab.

Beide Schalen der Brennfläche werden von sämmtlichen Strahlen des Systems berührt; auf ihnen schneiden sich immer je zwei unendlich nahe Strahlen. Jede Ebne, die sich durch je zwei solcher Strahlen legen lässt, ist eine Focalebne für ein Bündel und zugleich Tangentialebne an der Brennfläche. Die Schar der ersten Focalebnen berührt die erste Schale der Brennfläche und die Berührungsebnen an der zweiten geben die Schar der zweiten Focalebnen ab. Schneiden sich beide Schalen, so geht durch jeden ihrer Durchschnittspunkte eine erste und eine zweite Focalebne. Mithin wird der Winkel, den beide Schalen auf ihrer Durchschnittscurve mit einander bilden, durch den Winkel zwischen den Focalebnen in den einzelnen Punkten der Durchschnittscurve gemessen.

Ausser den gewöhnlichen, unendlich dünnen Strahlenbündeln giebt es noch eine ganz besondere Art, Hauptstrahlen genannt. Während nämlich die Axe des gewöhnlichen Bündels nur von zweien ihrer unendlich nahen Strahlen, den Focalstrahlen, getroffen wird, schneiden bei den Hauptstrahlen sämmtliche unendlich nahen Strahlen die Axe und zwar in einem und demselben Punkte, welcher Hauptbrennpunkt heisst. Es wird alsdann jede durch die Axe gelegte Ebne zu einer Focalebne. Der Winkel zwischen den beiden Focalebnen, welcher mit γ bezeichnet wird, hört auf, einen bestimmten Werth zu besitzen, und als charakteristisches Merkmal der Hauptstrahlen erhält man

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{0}{0} \qquad (4.)$$

§. 3. Optische Einleitung.

5) *Das Huyghens'sche Princip.* [1])

Bekanntlich stellt man sich die Verbreitung des Lichts von einem leuchtenden Punkte aus nach dem Huyghens'schen Principe in der Weise vor, dass man annimmt, es pflanzen sich von dem leuchtenden Punkte als Erschütterungsmittelpunkt nach allen Seiten hin Erschütterungen fort mit einer Geschwindigkeit, die von der Elasticität des den leuchtenden Punkt umgebenden Mediums abhängt. In einem homogenen Medium wird sich das Licht nach allen Seiten mit derselben Geschwindigkeit, die gleich v sei, fortpflanzen und nach t Secunden vom leuchtenden Punkte S aus sich bis zur Oberfläche einer Kugel mit dem Radius vt ausgebreitet haben, und jede Grade wie SA, die einen Punkt A der Kugelfläche mit S verbindet, heisst ein Lichtstrahl. Nach Verlauf von weiteren t′ Secunden hat das Licht sich von S aus bis zu der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius $v(t + t') = vt + vt'$ verbreitet. Wir

---

[1]) Christiani Hugenii tractatus de lumine. Amstelodami 1628.

erhalten nun aber dieselbe Wellenfläche, wenn wir mit vt' als Radius in jedem Punkte der mit vt beschriebenen Kugeloberfläche eine Kugel errichten. Diese Schar von Kugeln wird von der gesuchten kugligen Wellenfläche eingehüllt. Zum Unterschiede werden wir jede aus dieser Schar von Hülfskugeln eine Elementarwelle nennen; die einhüllende Kugel aber mit dem Radius $v(t + t')$ Hauptwelle. Offenbar wird ein Lichtstrahl, der durch den Punkt A' der Hauptwelle geht, auch den Mittelpunkt derjenigen Elementarwelle treffen, welche die Hauptwelle in A' berührt.

Wäre das Medium ein einaxiger Krystall, so würde sich von einem leuchtenden Punkte S in dem Medium die Erschütterung der ausserordentlichen Strahlen nach t Secunden über ein Rotationsellipsoid ABC ausgebreitet haben, und um zu wissen, wie weit das Licht nach $t + t'$ Secunden vorgerückt sei, construirt man sich für dieses einaxige Medium ein Rotationsellipsoid abc für die Zeit t' und versetzt ein solches in jeden Punkt von ABC, so dass die Elementarwellen abc alle einander congruent und gleichliegend werden, entsprechend der optischen Axe des fraglichen Mittels. Das diese Schar von Elementarwellen einhüllende Rotationsellipsoid ist die gesuchte Hauptwelle. Den durch den Punkt A' dieser Hauptwelle gehenden Strahl erhält man, wenn man A' mit dem Mittelpunkte derjenigen Elementarwelle verbindet, welche die Hauptwelle in A' berührt, d. h. mit ihr in A' eine gemeinsame Tangente hat.

Diese Elementarwellen sind rein mathematische Hülfsconstructionen, ohne dass es nöthig ist, ihnen physikalische Bedeutung zuzuschreiben. Sollen sie Realität besitzen, und sollen die Punkte der Fläche ABC als wirkliche optische Erschütterungsmittelpunkte angesehen werden, von denen aus das Licht sich verbreitet, wie von S, so muss man das erst in einer Hypothese aussprechen. So sehr manche Physiker zu dieser Hypothese geneigt zu sein scheinen, so ist sie doch überflüssig, ja sogar für das Verständniss erschwerend.

Wie nützlich es ist, statt der einen Hauptwelle eine Schar von Elementarwellen zu betrachten, lässt sich leicht an einem Beispiele übersehen. Eine anfangs nach einem bestimmten mathematischen Gesetze gekrümmte Hauptwelle werde verbogen, sei es dass sie an einer unregelmässigen Fläche gebrochen ist, oder dass sie an einer anisotropen Stelle des Mittels theilweise eine Verzögerung erlitten hat. Die Lichtstrahlen sind jetzt nicht mehr grade Linien von S nach den einzelnen Punkten der Hauptwelle ABC. Vielmehr construire ich für eine unendlich kleine Zeit dt eine Schar unendlich kleiner Elementarwellen und lasse in jedem Punkte der Hauptwelle eine solche berühren, um die Tangenten an die Lichtstrahlen im Endpunkte zu erhalten.

6. *Erweiterung des Huyghens'schen Princips.*

So weit ist diese Theorie bis jetzt ausgebildet. Um einen Schritt weiter zu thun, lenken wir unsere Aufmerksamkeit auf einen speciellen Fall.

Fig. 1. Von einem in unendlicher Ferne liegenden leuchtenden Punkte komme eine ebne Hauptwelle OX. Nach t Secunden befinde sie sich in AB, so dass $OA = vt$ ist.

In einem homogenen Medium berührt AB eine Schar von elementaren Kugeln vom Radius vt und mit ihren Mittelpunkten in OX. Das kommt aber auf dasselbe hinaus, als

wenn ich irgend eine andere Fläche, z. B. $A'B$, als Ort der Erschütterungsmittelpunkte betrachte und darauf auch Kugeln, aber mit verschiedenem Radius beschreibe, nach Maassgabe der Zeit, welche das Licht auf seinem Wege von den Punkten der Fläche $A'B'$ bis zu denen der Fläche AB gebraucht. In A' ist $t = \frac{AA'}{v}$; in B ist $t = \frac{BB'}{v}$. In A' errichte ich eine Kugel mit dem Radius AA'; in B' eine solche mit dem Radius BB; in den dazwischen liegenden Punkten andere nach Maassgabe der Zeit. Wir können $A'B'$ Ausgangsfläche des Stahlensystems nennen, und offenbar lässt sich jeder Strahl bestimmen, wenn man die Cosinus ξ, η, ζ seiner Winkel mit den Coordinatenaxen und die Coordinaten x, y, z desjenigen Punktes kennt, in welchem er die Ausgangsfläche A' B' trifft.

Offenbar gibt es eine Unzahl solcher Flächen, wie $A'B'$, die man zu Ausgangsflächen wählen kann.

So hat sich das Huyghens'sche Princip in zwei Schritten erweitert. Zuerst hatten wir einen leuchtenden Punkt, von dem aus, als Erschütterungsmittelpunkt, sich das Licht gleichzeitig nach allen Seiten auf der Wellenfläche des Lichts ausbreitet. Es gab nur eine Zeit und einen Erschütterungsmittelpunkt. Dann sahen wir, wie die Zeit zwar noch dieselbe blieb, aber statt des einen Erschütterungsmittelpunktes eine ganze Schaar von Punkten als Erschütterungsmittelpunkte angesehen werden konnten. Endlich erhielten wir für die Elementarwellen auch noch lauter verschiedene Zeiten, wenn wir als Ort der Erschütterungsmittelpunkte nicht die Hauptwelle, sondern irgend eine andere Ausgangsfläche des Strahlensystems wählten. Die Methode besteht also darin, die Dinge auseinander zu legen, uud wie das so häufig in der Mathematik geschieht, ist es uns durch Einführung einer grossen Anzahl von Willkürlichen möglich geworden, in jedem speciellen Falle durch Bestimmung der willkürlichen Zeit- und Raum-Grössen, uns aufs Engste an jede vorliegende Aufgabe anzuschmiegen.

Kehren wir zu unserem speciellen Falle zurück. Das Strahlenbündel $AA'B'B$ treffe an die Fläche AC und werde theils gebrochen, theils gespiegelt. Die gebrochene Hauptwelle sei CD; die gespiegelte CE. Eben so gut, wie wir vorhin statt der ankommenden Hauptwelle AB auch irgend eine andere krumme Fläche, welche das ankommende Bündel schneidet, als Ort der Erschütterungsmittelpunkte, unter Berücksichtigung der Zeit, betrachten konnten, steht es uns auch jetzt frei, nicht nur die Hauptwellen CD und CE selber, sondern sogar jede andere Fläche, die das gebrochene oder das gespiegelte Lichtbündel schneidet, als geometrischen Ort von Erschütterungsmittelpunkten anzusehen.

Nun giebt es aber eine Fläche, die mit ganz besonderem Nutzen als Ort der Erschütterungsmittelpunkte nach Maassgabe der Zeit in diesem Falle gewählt werden kann, weil sie nämlich alle drei Bündel schneidet und daher die Eigenschaft der Wählbarkeit für alle drei zugleich besitzt. Das ist die brechende Fläche CA. In diesem Falle ist es also einfacher, nicht die drei Hauptwellen, sondern diese brechende Fläche CA als Ausgangsfläche der drei Strahlenbündel zu wählen. Immer aber bleiben die drei Scharen von Elementarwellen mit ihren Erschütterungsmittelpunkten in CA reine geometrische Hülfsconsructionen ohne alle physikalische Existenz.

Cap. II. Das in der Natur vorkommende Strahlensystem des Lichts.

§ 4. Ein Lichtstrahl.

7) Geometrische Construction eines Lichtstrahls mittels der Haupt- und Elementar-Welle.

Es lässt sich das mathematische Strahlensystem in lauter unendlich dünne Strahlenbündel aufgelöst denken. Wir betrachten nun vorläufig nicht ein solches und suchen nicht die charakteristischen Eigenschaften auf, welche es zu einem wirklich in der Natur vorkommenden Lichtbündel machen, sondern betrachten einen einzigen Lichtstrahl, und zwar soll unter dieser Nummer nach Anleitung der in dem optischen Theile der Einleitung an einzelnen Beispielen dargelegten Methode ein Lichtstrahl geometrisch construirt werden. Unter der nächsten Nummer sollen sodann seine Gleichungen aufgestellt und die im mathematischen Theile der Einleitung erwähnten allgemeinen Functionen eines mathematischen Strahls für den Fall eines optischen Strahls specialisirt werden. Erst im nächsten Paragraphen kann die Untersuchung eines unendlich dünnen Strahlenbündels des Lichts beginnen.

Wir wählen eine ganz beliebige krumme Fläche als Hauptwelle und eine möglichst allgemeine Elementarwelle für die unendlich kleine Zeit dt. Nur muss die Elementarwelle, wie aus ihrem Wesen folgt, eine geschlossene Fläche sein und in ihrem inneren einen Erschütterungsmittelpunkt enthalten. In jedem Punkte der Hauptwelle berühre eine dieser Elementarwelle congruente und gleichliegende Fläche. Jede Grade, welche irgend einen Punkt A der Hauptwelle mit dem Erschütterungsmittelpunkte derjenigen Elementarwelle verbindet, die in A die Hauptwelle berührt, die also mit ihr in A dieselbe Tangentialebne hat, ist ein Lichtstrahl. In doppelt- oder gar mehrfach brechenden Medien betrachten wir jede Schale der Elementarwelle, bei mehrfarbigem Lichte jede Farbe für sich.

Da alle Elementarwellen, welche die Hauptwelle berühren, nicht nur ähnlich, sondern auch gleichliegend sind, so lässt sich eine Vereinfachung anbringen, welche für das Folgende von grösster Bedeutung ist.

Wir ersetzen nämlich die Schar von Elementarwellen durch eine einzige, den andern congruente und gleichliegende, welche ihren Erschütterungsmittelpunkt im Coordinaten-Anfange O hat. Die Elementarwelle, welche bisher die Hauptwelle in A berührte, sei diejenige, welche wir mit ihrem Erschütterungsmittelpunkte nach O verlegen. Dann haben Haupt- und Elementarwelle nicht mehr in A eine gemeinsame Tangentialebne; sondern die Tangentialebne an die Elementarwelle ist nur noch parallel mit der andern in A und berühre die Elementarwelle in A′. — Die Construction für einen Lichtstrahl gestaltet sich auf diese Weise folgendermassen: Man lege in A an die Hauptwelle eine Tangentialebne, dieser parallel an die Elementarwelle mit ihrem Erschütterungsmittelpunkt in O auch eine Tangentialebne, welche diese in A′ berühre, so ist der Lichtstrahl eine Grade durch A, parallel zum Radius der Elementarwelle OA′.

Die Analogie dieser neuen Betrachtungsweise mit dem Gauss'schen Krümmungsmaasse springt in die Augen, ja die ganze Methode lässt sich als eine Erweiterung von jener ansehen, was später noch mehr hervortreten wird. Ist die Elementarwelle eine Kugel, so haben wir jenes Krümmungsmaass selber; alsdann werden die Strahlen Normalen der Hauptwelle.

So haben wir denn eine Hauptwelle und nur eine einzige Elementarwelle. Aber so grosse Analogien sich auch zwischen beiden herausstellen werden, so muss man sie doch nie mit einander verwechseln; sondern immer festhalten, dass die Strahlen zur Hauptwelle gehören und die ihnen parallelen und entsprechenden radii vectores zur Elementarwelle. Liegt der Erschütterungsmittelpunkt in einem der Strahlen, so wird dieser zwar in diesem Falle mit seinem entsprechenden radius der Elementarwelle zusammenfallen; die ihm unendlich nahen Strahlen aber sind nach wie vor ihrem entsprechenden radius nur parallel, und gehen nicht etwa alle durch den Erschütterungsmittelpunkt.

8) *Analytische Gleichungen eines Lichtstrahls als Functionen der Haupt- und Elementar-Welle.*

Es sollen jetzt die Gleichungen eines Lichtstrahls aufgestellt werden. Derselbe gehe durch den Punkt (x', y', z') und mache mit den Coordinatenaxen Winkel, deren Cosinus ξ, η, ζ seien, so sind seine Gleichungen:

$$\frac{X-x'}{\xi} = \frac{Y-y'}{\eta} = \frac{Z-z'}{\zeta}, \qquad (5.)$$

wenn X, Y, Z die laufenden Coordinaten sind. — Liegt der Punkt (x', y', z') auf der Hauptwelle $z = F(u, v)$, so ist

$$x' = u, \quad y' = v, \quad z' = F(u, v), \qquad (6.)$$

und die Tangentialebne, welche die Hauptwelle in (x', y', z') berührt, ist

$$Z-z' = P(X-x') + Q(Y-y'), \qquad (7.)$$

wenn X, Y, Z die laufenden Coordinaten; P, Q die ersten partiellen Differentialquotienten der Hauptwelle bezeichnen. Die dieser Tangentialebne entsprechende berühre die Elementarwelle im Punkte (x, y, z) und ihre Gleichung sei der obigen analog

$$Z-z = p(X-x) + q(Y-y). \qquad (8.)$$

Da die durch die Gleichungen bei (7) und (8) dargestellten Ebnen parallel sind, so muss sein

$$Q = q, \quad P = p, \qquad (9.)$$

welches also die Bedingungsgleichungen dafür sind, dass die Punkte (x, y, z) und (x', y', z') sich entsprechen. Da ferner der Radius ϱ der Elementarwelle in (x, y, z) dieselben Richtungscosinus ξ, η, ζ hat, wie der Strahl in x', y', z' selber, so bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{\varrho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \eta &= \frac{y}{\varrho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \zeta &= \frac{y}{\varrho} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.)$$

Durch Substitution dieser Werthe für ξ, η, ζ in die Gleichungen des Lichtstrahls bei (5) kommt

(11.) $$\frac{X-x'}{x} = \frac{Y-y'}{y} = \frac{Z-z'}{z},$$

Gleichungen, die nur noch von der Haupt- und Elementarwelle abhängen.

Es erübrigt noch, die im mathematischen Theile der Einleitung bereits erwähnten Gauss'schen Functionen für diesen speciellen Fall zu berechnen. Bekanntlich hat Gauss[1]) folgende Bezeichnungen in die Analysis eingeführt:

$$dx = adu + a'dv,\ dy = bdu + b'dv,\ dz = cdu + c'dv; \text{ ferner:}$$

(12.) $$A = bc' - b'c,\ B = ca' - c'a,\ C = ab' - a'b, \text{ und:}$$

$$E = a^2 + b^2 + c^2,\ F = aa' + bb' + cc',\ G = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

Die Gleichung bei (6) liefert differenzirt

$$dx' = du,\ dy' = dv,\ dz = Pdu + Qdv.$$

Durch Vergleichung dieser Formeln mit denen bei (12) ergiebt sich:

$$a = 1,\ a' = o;\ b = o,\ b' = 1;\ c = P,\ c' = Q.$$

Mit deren Hilfe lässt sich finden

$$A = -P,\ B = -Q,\ C = 1;\ E = 1 + P^2,\ F = PQ,\ G = 1 + Q^2.$$

Differenziren wir die Formeln bei (10), so entstehen die ähnlichen, auch schon erwähnten Kummer'schen Werthe:

$$\mathfrak{a} = \frac{C(y^2+z^2)+A\,xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad \mathfrak{a}' = \frac{-x\,(Cy - Bz)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

$$\mathfrak{b} = \frac{C(x^2+z^2)+A\,yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\quad \mathfrak{b}' = \frac{-y\,(Cx - Bz)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\mathfrak{c} = \frac{A(x^2+y^2)+C\,xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}};\quad \mathfrak{c}' = \frac{-P(x^2+y^2)+C\,yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Das wären denn die Werthe, welche die in der Kummer'schen Abhandlung über mathematische Strahlensysteme vorkommenden Functionen so specialisiren, wie es für die optischen Strahlensysteme nöthig ist.

§. 5. Ein unendlich dünnes Strahlenbündel des Lichts.

9) *Die entsprechenden Richtungen im Allgemeinen.*

Im vorigen Paragraphen haben uns die Construction und die Gleichungen eines Lichtstrahls beschäftigt. Es ist nun leicht, zwei unendlich nahe Strahlen zu untersuchen, und zwar soll der eine Axe des unendlich dünnen Strahlenbündels des Lichts sein; der andere irgend einer der ihr unendlich nahen Strahlen. Ist die Gleichung eines Lichtstrahls wie oben

(11.) $$\frac{X-x'}{x} = \frac{Y-y'}{y} = \frac{Z-z'}{z}$$

für die beiden entsprechenden Punkte (x', y', z') und (x, y, z) respective der Haupt- und Elementarwelle, so hat ein unendlich naher Strahl die Gleichungen

[1]) Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas.

$$\frac{X-(x'+dx')}{x+dx} = \frac{Y-(y'+dy')}{y+dy} = \frac{Z-(z'+dz')}{z+dz}.$$

$\frac{dx'}{dy'}$ bestimmt die Richtung auf der Hauptwelle, in der man von dem Treffpunkte (x', y', z') der Axe des Bündels zu dem Treffpunkte $(x'+dx', y'+dy', z'+dz')$ eines benachbarten Strahls übergeht und $\frac{dy}{dx}$ die entsprechende Richtung auf der Elementarwelle, in welcher man von (x, y, z) nach $(x+dx, y+dy, z+dz)$ gelangt.

Ueber diese durch $\frac{dy'}{dx'}$ und $\frac{dy}{dx}$ bestimmten entsprechenden Richtungen auf Haupt- und Elementarwelle habe ich in einer Abhandlung [1]) „Ueber allgemeine Strahlensysteme des Lichts in verschiedenen Medien“ auf analytischem Wege zwei Sätze bewiesen. „Bestimmt“ nämlich, wie in der Einleitung, „ $\frac{\delta y'}{\delta x'}$ die zu $\frac{dy'}{dx'}$, und $\frac{\delta y}{\delta x}$ die zu $\frac{dy}{dx}$ conjugirte Richtung, so sind die durch $\frac{\delta y'}{\delta x'}$ und $\frac{\delta y}{\delta x}$ bestimmten Richtungen parallel, d. h. es ist $\frac{\delta y'}{\delta} = \frac{\delta y}{\delta x}$."

„Weiss man umgekehrt, dass $\frac{\delta y'}{\delta x'} = \frac{\delta y}{\delta x}$ ist, so entsprechen die durch $\frac{dy'}{dx'}$ und $\frac{dy}{dx}$ bestimmten Richtungen einander.“ Ich bin daselbst zu den zweiten partiellen Differentialquotienten übergegangen durch Differenziation der Gleichungen bei (9), was

$$rdx + sdy = Rdx' + Sdy', \quad sdx + tdy = Sdx' + Tdy'$$

ergiebt. Mit Hülfe derselben lässt sich $\frac{dy}{dx}$ durch $\frac{dy'}{dx'}$ ausdrücken, und setzt man in derselben für $\frac{dy'}{dx'}$ aus der Dupin'schen Gleichung

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{R + S\,\frac{\delta y'}{\delta x'}}{S + T\,\frac{\delta y'}{dx}} \qquad (3.)$$

seinen Werth ein, so ergiebt sich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{r + s\,\frac{\delta y'}{\delta x'}}{s + t\,\frac{\delta y'}{\delta x'}}. \qquad (13.)$$

Da aber die Dupin'sche Gleichung liefert

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{r + s\,\frac{\delta y}{\delta x}}{s + t\,\frac{\delta y}{\delta x}}, \qquad (3.)$$

so ergiebt sich aus der Vergleichung

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y'}{\delta x'}.$$

---

[1]) Meibauer, Zeitschrift für Mathematik und Physik. VIII. Jahrg. 1863.

Bei der Wichtigkeit dieser Sätze für das Folgende, soll hier noch ein einfacher Beweis gegeben werden, der sich auf geometrische Betrachtung stützt.

Wie von Dupin (siehe Einleitung) nachgewiesen worden, schneiden sich die beiden Tangentialebnen in (x, y, z) und (x + dx, y + dy, z + dz) in einer Richtung, die zu $\frac{dy}{dx}$ conjugirt, mithin durch $\frac{\delta y}{\delta x}$ bestimmt ist. Dasselbe gilt für die Tangentialebnen in (x', y', z') und (x' + dx', y' + dy', z' + dz'); auch ihre Durchschnittslinie wird durch $\frac{\delta y'}{\delta x'}$ bestimmt. Diese beiden Durchschnitte entstehen aber durch zwei Paare entsprechender, d. h. paralleler Ebnen, sie müssen also parallel und

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y'}{\delta x'}$$

sein, was zu beweisen war. Die durch $\frac{\delta y}{\delta x}$ und $\frac{\delta y'}{\delta x'}$ bestimmten Richtungen sind im Allgemeinen keine entpsrechenden. In ähnlicher Weise lässt sich umgekehrt beweisen, dass $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy'}{dx'}$ sich entsprechen, wenn $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y'}{\delta x'}$.

So haben wir die Sätze:

1) Hat man auf der Hauptwelle und der Elementarwelle irgend ein Paar entsprechender Richtungen, so sind die ihnen conjugirten Richtungen unter sich parallel.

2) Hat man in entsprechenden Punkten irgend ein Paar paralleler Tangenten, eine an die Hauptwelle, die andere an die Elementarwelle, so sind die denselben conjugirten Richtungen einander entsprechend.

Diese beiden Sätze scheinen bis jetzt von Keinem bemerkt zu sein. Ich habe sie zuerst in meiner Inauguraldissertation veröffentlicht. [1])

Vermöge ihrer Reciprocität findet jeder Satz, den man aus ihnen für die Hauptwelle und ihre Strahlen folgert, sein Analogon für die Elementarwelle und die entsprechenden radii vectores. Wenn etwa ein Satz von dem Verhältnisse der Strahlen zu der Krümmung der Hauptwelle handelt, so muss der analoge von der Krümmung der Elementarwelle und ihrem Verhalten zu den radii vectores, aber nicht von ihrem Verhalten zu den Strahlen sprechen. Zu dem Satze z. B., dass in homogenen Medien alle Strahlen auf der Hauptwelle senkrecht stehen, lautet der triviale analoge: Auf der Kugel stehen die Radien senkrecht. — Die Strahlen fallen in das Gebiet der Hauptwelle; die Radien aber in das der Elementarwelle.

10) Die entsprechenden Richtungen in den Focalebnen.

Unter den entsprechenden Richtungen, von welchen obige beiden Sätze handeln, ist am interessantesten die, in welcher man von der Axe des Bündels zum Focalstrahl gelangt,

---

[1]) **Meibauer. De generalibus et infinite tenuibus luminis fascibus, praecipue in chrystallis. Berlin 1861. (Verlag von Luederitz.)**

welcher (siehe oben) die Axe in einem Brennpunkte schneidet, und die dieser Richtung entsprechende.

Der Anfang unseres rechtwinkligen Coordinatensystems liegt bereits im Erschütterungsmittelpunkte. Wir legen jetzt die Z Axe parallel zur Axe des Strahlenbündels, so dass sie also mit dem Radius zusammenfällt, welcher der Axe des Bündels entspricht. Im Uebrigen bleibe das Coordinatensystem noch vorläufig unbestimmt.

Nachdem dieses festgesetzt ist, wenden wir uns nun zu der Focalebne. Dieselbe geht durch die Axe des Bündels und den Focalstrahl; die der Focalebne entsprechende Ebne geht durch die Z Axe und den dem Focalstrahle parallelen Radius. Demnach ist die Focalebne ihrer entsprechenden Ebne parallel. Bezeichnet $\frac{dy'}{dx'}$ die Richtung, in welcher man von der Axe des Bündels zum Focalstrahle gelangt und $\frac{dy}{dx}$ die entsprechende, so bestimmen $\frac{dy'}{dx'}$ und $\frac{dy}{dx}$ die Lage zweier parallelen Ebnen und es gilt für die Focalebne Formel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'} .$$

In Worten: Liegt die durch $\frac{dy'}{dx'}$ bestimmte Richtung in einer Focalebne, so ist die entsprechende Richtung auf der Elementarwelle ihr parallel.

Nach dem Satz 1. war erstens $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y'}{\delta x'}$; wenn aber $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}$ ist, so müssen nach Satz 2. die durch $\frac{\delta y}{\delta x}$ und $\frac{\delta y'}{\delta x'}$ bestimmten Richtungen nunmehr sich zweitens auch entsprechen. Es haben jetzt $\frac{\delta y}{\delta x}$ und $\frac{\delta y'}{\delta x'}$ dieselben beiden Eigenschaften wie die Werthe $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy'}{dx'}$, und es bestimmen jene so gut wie diese die Lage einer Focalebne, nämlich der zweiten. Als Resultat erhalten wir folgende beiden Fundamentalsätze:

3) Die beiden Focalebnen schneiden sich auf der Hauptwelle in conjugirten Richtungen.

4) Die den Focalebnen entsprechenden Ebnen schneiden sich auf der Elementarwelle in conjugirten Richtungen.

Für die Lage der Focalebnen lassen sich demnach die Gleichungen aufstellen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{r + s\,\frac{\delta y}{\delta x}}{s + t\,\frac{\delta y}{\delta x}}, \\ \frac{dy'}{dx'} &= -\frac{R + S\,\frac{\delta y'}{\delta x'}}{S + T\,\frac{\delta y'}{\delta x'}}. \end{aligned}\right\} \qquad (14.)$$

Es ist nun leicht, den in der historischen Einleitung erwähnten, von Herrn Kummer der Berliner Akademie der Wissenschaften vorgelegten Satz abzuleiten. Es ist nämlich nur nöthig, den Coordinatenanfang sammt dem Erschütterungsmittelpunkte in die Axe des Strahlenbündels zu verlegen. So fallen die Focalebnen mit den ihnen entsprechenden Ebnen zusammen und die Coordinatenaxe liegt in der Axe des Bündels. In diesem speciellen Falle schneiden sich die Focalebnen auch auf der Elementarwelle unter conjugirten Richtungen.[1])

Die Haupt- und Elementarwelle können im Allgemeinen nur eine Berührung erster Ordnung haben, so dass $P = p$, $Q = q$ ist; darum brauchen aber natürlich noch nicht die partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung bezüglich gleich zu sein. Ebensowenig sind die Indicatrices in entsprechenden Punkten dieselben, und die conjugirten Durchmesser der einen sind keineswegs mit sämmtlichen conjugirten Durchmessern der anderen parallel. Es ist aber von vorne herein denkbar, dass wenigstens ein Paar solcher Durchmesser in den entsprechenden Indicatrices parallel sei. Die obigen Sätze zeigen, dass es nur ein einziges solches Paar giebt, und dass dieses Paar conjugirter Durchmesser in den beiden Focalebnen liegt. Dieser Satz gilt nicht bloss für die Haupt- und Elementarwelle, sondern nach Abstreifung des optischen Beiwerks in der Theorie der Oberflächen überhaupt für jede zwei beliebigen krummen Flächen.

11) Der Winkel zwischen den Focalebnen.

Der Hauptwerth, welchen die Sätze bei 3) und 4) haben, auf die wir unter der vorigen Nummer geführt sind, besteht darin, dass sie die Mittel bieten, den Winkel γ zwischen den Focalebnen als Function der Haupt- und Elementarwelle auszudrücken.

In unserem Coordinatensysteme stehen die Focalebnen senkrecht auf der Coordinatenebne der $x\,y$, und $\frac{dx'}{dy'}$ ist daher die trigonometrische Tangente des Winkels α, den die erste Focalebne mit der Coordinatenebne der xz macht. Ebenso ist $\frac{\delta y'}{\delta x'}$ die trigonometrische Tangente des Winkels β, den die zweite Focalebne mit der xz-Ebene macht, und es entstehen die Ausdrücke

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'} = \mathrm{tg}\,\alpha,\ \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y'}{\delta x'} = \mathrm{tg}\,\beta,\ \angle\,\gamma = \angle\,\beta - \angle\,\alpha,$$

---

[1]) Hamilton scheint nicht nur diesen, sondern auch den Satz 3 schon gekannt zu haben; in den transactions of the Royal Irish Ac. vol. XVIII., pag 122, findet sich wenigstens folgende Stelle: Thus we are led to consider a series of waves or action surfaces V_1 similar and similarly placed, and determined in shape, but not in size by the uniform medium (unsere Schaar von Elementarwellen), and then to seek the limiting surface of this set, which osculates to the given surfaces, V (unsere Hauptwelle), and it follows, that the conjugate planes of vergency (unsere Focalebnen), in a uniform medium are conjugate planes of each medium surface V_1 (Elementarwelle), and also of the surface V (Hauptwelle), determined by the whole combination.

$$\text{folglich: } \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta}. \tag{15.}$$

Setzen wir in die Gleichungen bei (14), welche die Lage der Focalebnen als Functionen der Hauptwelle und Elementarwelle darstellen, für $\frac{dy'}{dx'}$ und $\frac{\partial y'}{\partial x'}$ die Werthe $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\beta$ ein, so kommt

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{R + S \operatorname{tg}\beta}{S + T \operatorname{tg}\beta}, \tag{16.}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r + s \operatorname{tg}\beta}{s + t \operatorname{tg}\beta}. \tag{17.}$$

Aus den Gleichungen bei (15), (16), (17) lassen sich die drei Veränderlichen α, β, γ bestimmen. Weiter unten werden wir uns durch Elimination von $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\beta$ eine Gleichung mit der einzigen Veränderlichen $\operatorname{tg}\gamma$ bilden.

Da $\angle\,\alpha$ und $\angle\,\beta$ ganz analoge Bedeutung haben, so lässt sich einer von ihnen entbehren. Durch Elimination von $\operatorname{tg}\beta$ aus (15), (16), (17) entstehen zwei neue Gleichungen mit nur zwei Veränderlichen. Nämlich aus (15) und (16) ergiebt sich

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{T \operatorname{tg}^2\alpha + 2 S \operatorname{tg}\alpha + R}{S \operatorname{tg}^2\alpha + (R-T) \operatorname{tg}\alpha - S}, \tag{18.}$$

und aus den Formeln bei (15) und (17)

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{t \operatorname{tg}^2\alpha + 2 s \operatorname{tg}\alpha + r}{s \operatorname{tg}^2\alpha + (r-t) \operatorname{tg}\alpha - s}. \tag{19.}$$

Diese beiden Gleichungen sollen im nächsten Capitel untersucht werden, oder vielmehr nur eine von ihnen, da sich bei ihrer Analogie für die andere sogleich die Resultate ablesen lassen. Die eine liefert den Zusammenhang des Winkels γ zwischen den Focalebnen mit den Elementen R, S, T der Hauptwelle; die andere verbindet γ mit der Elementarwelle.

Zu jedem Satze über die Elementarwelle wird ein analoger auftreten, der von der Hauptwelle handelt, wenngleich die Form, in der solche analogen Sätze ausgesprochen werden müssen, sehr von einander abweichen kann.

Habe ich im Punkte $(x', y' z')$ der Hauptwelle die Axe eines bestimmten, unendlich dünnen Strahlenbündels, und kenne ich den $\angle\,\alpha$, den seine erste Focalebne mit der Coordinatenebne der xz einschliesst, so lässt sich mittels der Gleichung bei (18) für dieses bestimmte Strahlenbündel der Winkel zwischen den Focalebnen berechnen. Für jeden andern Werth von α erhalte ich ein anderes Strahlenbündel, das einen anderen Winkel γ besitzt, und durchläuft $\operatorname{tg}\alpha$ alle möglichen Werthe von o bis ∞, so entstehen alle für diese bestimmten Werthe von R, S, T, d. h. in diesem bestimmten Punkte der Hauptwelle möglichen Strahlenbündel.

Der geometrische Vorgang, durch den sich also bei dieser ersten Methode die Erzeugung aller möglichen Lichtbündel versinnbildlichen lässt, besteht in einer Drehung der erten Focalebne um die Axe des Bündels.

In dem nächsten Paragraphen kommt es darauf an, zu untersuchen, welche Strahlen-

bündel für einen bestimmten Punkt der Elementarwelle möglich sind. Diese Frage reducirt sich auf die Discussion der Natur und des Laufes der Function $\operatorname{tg}\gamma$ in der Gleichung bei (19), während $\operatorname{tg}\alpha$ variirt.

Capitel III. Die Brennfläche des Strahlensystems nach der ersten Methode.

§. 6. Die Brennfläche in ihrer Abhängigkeit von den Eigenschaften der Elementarwelle.

12) Das Maximum des Winkels zwischen den Focalebnen.

Wie früher vom einfachen Lichtstrahle zum Strahlenbündel, so erheben wir uns jetzt von diesem zum allgemeinen Strahlensysteme des Lichts. Die Focalebnen sind alsdann (siehe Einleitung) Tangentialebnen an die beiden Schalen der Brennfläche, und γ bedeutet den Winkel, unter dem sich die Schalen schneiden, was auch, wenn man die Elementarwelle als verallgemeinertes Gauss'sches Krümmungsmaass und die Hauptwelle als Ausgangsfläche des Strahlensystems betrachtet, für die allgemeine Theorie der krummen Oberflächen von Wichtigkeit ist.

Die erste Frage, welche eigentlich zu beantworten wäre, würde sein, wann $\operatorname{tg}\gamma = \frac{0}{0}$ ist, wann also Hauptstrahlen möglich sind. Die Antwort lautet, wenn $r = o$, $s = o$, $t = o$. Es geht daraus hervor, dass weder die Gleichung bei (19) noch die bei (18) zur Discussion der Hauptstrahlen sich eignet. Die zweite Methode wird erst darüber Aufschluss geben.

Das Nächste soll sein, zu untersuchen, ob die Function $\operatorname{tg}\gamma$ bei der Veränderung von α einen Maximumswerth etwa annehmen könne, oder ob und wann sie in's Unendliche wachse. Es verschwinde in der Formel bei (19) der Nenner rechts:

(20.) $$\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{r-t}{s}\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0.$$

Dies ist die Bedingung dafür, dass $\operatorname{tg}\gamma = \infty$ sei, also die beiden Focalebnen auf einander senkrecht stehen.[1]) Aus (20) folgt:

---

[1]) Der Ausdruck bei (20) kommt auch in der Theorie der Hauptschnitte vor. So ist bekanntlich bei Monge in seiner „Application de l'Analyse à la Géométrie“ die Bedingung der auf einander senkrechten Hauptebnen $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{r-t}{s}\frac{dy}{dx} - 1 = 0$. Wie dort in den Hauptschnitten die Normale des fraglichen Punkts von der benachbarten geschnitten wird, so schneiden sich hier bei der allgemeineren Theorie in den Focalebnen die auf der Hauptwelle im Allgemeinen schief stehende Bündelaxe und die Focalstrahlen. Bei Monge ist die z-Axe parallel der Normale im fraglichen Punkt; hier der Axe des Lichtbündels.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{t - r \pm \sqrt{(r - t)^2 + 4 s^2}}{2 s}, \tag{21.}$$

wodurch die Lage gegeben wird, welche die erste Focalebne haben muss, wenn $\gamma = \frac{\pi}{2}$ sein soll. Da der Werth unter der Wurzel stets real ist, so giebt es stets zwei solche Lagen der ersten Focalebne. Da aber bei (20) das letzte Glied — 1 ist, so ist das Product der beiden Wurzeln von $\operatorname{tg} \alpha$ gleich — 1. Die beiden Lagen der ersten Focalebnen, in welchen die zweite auf ihr senkrecht ist, stehen selber auf einander senkrecht; die beiden Focalebnen sind nur mit einander vertauscht. Demnach giebt es in jedem Punkte der Elementarwelle immer nur eine einzige Lage der den Focalebnen entsprechenden Ebnen, wo diese, also auch die Focalebnen selber einander senkrecht sind.

Es wird bei (21) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{o}{o}$, wenn

$$s = o, \quad r = t. \tag{22.}$$

Sind ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien, so ist bekanntlich nach Euler für $s = o$,

$$\varrho_1 = \frac{1}{r}, \ \varrho_2 = \frac{1}{t},$$

folglich nach (22)

$$\varrho_1 = \varrho_2.$$

Ist also die Elementarwelle eine Kugel oder der angewandte Punkt ein Nabelpunkt, so giebt es keine bestimmte Lage der ersten Focalebne, wo $\gamma = \frac{\pi}{2}$ wird, sondern sämmtliche Lichtbündel haben den Winkel $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Daraus geht hervor: Die Focalebnen aller Strahlenbündel in homogenen Mitteln, ferner der ordentlichen Strahlenbündel einaxiger Krystalle, endlich von Strahlenbündeln deren Axe der optischen Axe in einaxigen Krystallen parallel läuft, sind auf einander senkrecht[1]); denn in einem Rotationsellipsoid, und das ist die ausserordentliche Elementarwelle einaxiger Krystalle, trifft die Rotationsaxe in einen Nabelpunkt. Aus Obigem leiten sich für das ganze Strahlensystem die schon früher gefundenen Sätze ab: Die Brennflächen aller in homogenen Mitteln möglichen Strahlensysteme schneiden sich unter rechten Winkeln. Dasselbe thun sie in einaxigen Krystallen für die ordentlichen Strahlensysteme. (Wenn die Focalebnen einander senkrecht sind, so fallen sie

---

[1]) Diesen Satz hat zuerst Hamilton gefunden:

„When the medium is ordinary as well as uniform, than the osculating surfaces V_1 (Elementarwellen) are spheres, and the derections of extreme osculation (Die Richtungen, unter denen die „Hauptebnen" die Hauptwelle schneiden) are the rectangular directions of the lines of curvature on the surface V (Hauptwelle), which is now perpendicular to the rays; in this case, therefore, and more generally when a ray in a uniform medium correspond to an umbilical point on the medium surface V_1, the planes of vergency (Focalebnen) cut that surface and the surface V to which it osculates in two rectangular directions."

mit den Hauptebnen des Herrn Kummer zusammen und die Brennpunkte mit den Grenzpunkten der kürzesten Abstände. Folglich, wenn die Brennflächen sich senkrecht schneiden, so fallen sie mit den Grenzflächen zusammen.) Für die Theorie der Flächen ist die sphärische Elementarwelle das wirkliche Gauss'sche Krümmungsmaass, die Hauptwelle aber die Ausgangsfläche eines Strahlensystems. Die auf diese Weise erzeugten Strahlen sind normal auf der Ausgangsfläche, deren beide Flächen der Hauptkrümmungsmittelpunkte sich senkrecht schneiden.

13) Das Minimum des Winkels zwischen den Focalebnen.

Wenn auch kein Maximum, so besitzt doch die Function $\operatorname{tg}\gamma$ bei (19) ein Minimum. Es möge der Zähler der rechten Seite verschwinden; also sein

$$t \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 s \operatorname{tg} \alpha + r = 0, \text{ oder}$$

(23.) $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t}.$$

Es wird dadurch die Lage der ersten Focalebne bestimmt, in welcher die zweite mit ihr zusammenfällt. Immer giebt es zwei solche Lagen, wenn $s^2 - rt > 0$, der Punkt der Elementarwelle somit concav-convex ist. Das findet bekanntlich auf der Fresnel'schen Wellenfläche an 4 durch 4 Kreise begrenzten Stellen statt. [1])

Die beiden in eine zusammengefallenen Focalebnen [2]) schneiden die Elementarwelle in der Richtung der unendlich grossen Krümmungsradien, oder was dasselbe ist, in der Richtung der Asymptoten der hyperbolischen Indicatrix, wie sich aus Dupin [3]) ergiebt.

Ist aber $s^2 - rt = 0$, so handelt es sich bekanntlich um einen solchen Punkt, der von einer abwickelbaren Fläche osculirt werden kann. Da bei der Fresnel'schen Wellenfläche innerhalb jener 4 Kreise $s^2 - rt > 0$; ausserhalb derselben kleiner als Null ist, so muss auf den Kreisen selbst $s^2 - rt = 0$ sein. Auf jenen Kreisen findet aber die innere

---

[1]) Hamilton, Irish Ac. XVII.
Plücker, Discussion de la forme générale des ondes lumineuses. Crelle's Journal Bd. XIX.

[2]) Hamilton beschreibt diesen Fall folgendermassen: Irish Ac. XVII. pag. 85. The two planes of vergency close up into one plane; the two vergencies (Focalstrahlen) reduce themselves to a single vergency, corresponding to this single plane, and the two guiding lines (gradlinigen Querschnitte) reduce themselves to a single guiding line.

[3]) Dupin, Développents de Géométrie: Pour connaître, à partir de quelles valeurs de ψ (hier $\operatorname{tg} \alpha$) les rayons de courbures seront positifs, lorsque ψ variéra dans un sens, et négatifs, lorsque ψ en sens contraire, il faut supposer seulement

$$r + 2s\psi + t\psi^2 = 0$$

ou

$$\psi = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t},$$

und das ist dieselbe Gleichung, wie die bei (23).

konische Refraction statt. Will man also die Eigenschaften der Brennfläche bei der inneren konischen Refraction studiren, so ist $s^2 - rt = 0$ zu setzen. Dann wird $\operatorname{tg}\alpha$ bei (23) gleich $-\frac{s}{t}$ und $\operatorname{tg}\gamma = \frac{0}{0}\cdot$ Dieses $\frac{0}{0}$ deutet jedoch nur scheinbar auf eine Unbestimmtheit hin, und es treten hier darum noch keine Hauptstrahlen auf. Es soll dieser Fall in einem spätern Abschnitte besonders behandelt werden.

Ist endlich bei (23) $s^2 - rt < 0$, d. h. der Punkt der Elementarwelle concav-concav, so ist $\operatorname{tg}\alpha$ imaginär. In solchen Punkten also existiren keine Strahlenbündel, deren Focalebnen zusammenfallen, und alle durch sie erzeugten Brennflächen haben zwei Schalen.

In diesem Falle, wo $\operatorname{tg}\gamma$ nicht verschwinden kann, wird eine Minimumberechnung nöthig. Es ist daher in

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{t\operatorname{tg}^2\alpha + 2s\operatorname{tg}\alpha + r}{s\operatorname{tg}^2\alpha + (r-t)\operatorname{tg}\alpha - s} \tag{19.}$$

der partielle Differentialquotient von $\operatorname{tg}\gamma$ nach $\operatorname{tg}\alpha$ gleich Null zu setzen.

$$(2t\operatorname{tg}\alpha + 2s)\left[s\operatorname{tg}^2\alpha + (r-t)\operatorname{tg}\alpha - s\right] - (2s\operatorname{tg}\alpha + r - t)(t\operatorname{tg}^2\alpha + 2s\operatorname{tg}\alpha + r) = 0,$$

oder

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{s(r+t) \pm \sqrt{s^2(r+t)^2 + [r(r-t) + 2s^2][t(r-t) - 2s^2]}}{t(r-t) - 2s^2}$$

einfacher

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{s(r+t) \pm \sqrt{(rt - s^2)\left[(r-t)^2 + 4s^2\right]}}{t(r-t) - 2s^2}. \tag{24.}$$

Das Zeichen unter der Wurzel hängt allein von $rt - s^2$ ab. Für concav-concave Punkte giebt es somit immer zwei durch den Werth bei (24) bestimmte Lagen der ersten Focalebne, wo γ Minimum ist. Um den Werth dieses Minimums zu finden, ist der Ausdruck für $\operatorname{tg}\alpha$ bei (24) in die Gleichung bei (19) einzusetzen. Um aber ein übersichtliches Resultat zu gewinnen, soll von der letzten noch gestatteten und auch von Dupin, Hamilton, Monge bei ähnlichen Untersuchungen angewandten Coordinatenverlegung Gebrauch gemacht werden.

Bis jetzt liegt nur die Z-Axe parallel zur Axe des Strahlenbündels; um dieselbe sind noch die Coordinatenebnen der xz und yz drehbar. Wir wollen sie so legen, dass

$$s = 0$$

werde. Bei (21) wurde die Lage der ersten Focalebnen bestimmt, in der $\angle\gamma$ ein Rechter wird. Dieselbe liefert für $s = 0$ für α den Werth $\frac{\pi}{2}\cdot$ Die erste Focalebne fällt in die yz-Ebne. In dem neuen Coordinatensystem sind die auf einander senkrechten Focalebnen die Coordinatenebnen der xz und yz. Da aber die einander senkrechten Focalebnen in den Hauptebnen liegen, so spielen für $s = 0$ die Hauptebnen die Rolle von Coordinatenebnen, und das ist der Grund, weshalb Hamilton empfiehlt, die Hauptebnen zu Coordinatenebnen zu wählen.

Für $s = 0$ geht die Gleichung bei (19) in folgende über

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{r + t\operatorname{tg}^2\alpha}{(r-t)\operatorname{tg}\alpha}, \tag{25.}$$

und aus der bei (24) wird

(26.) $$\mathrm{tg}\ \alpha = \pm\sqrt{\frac{r}{t}}.$$

Die beiden Gleichungen liefern verbunden

$$\mathrm{tg}\ \gamma = -\frac{\pm 2\sqrt{rt}}{r-t} = \frac{2\sqrt{\varrho_1 \cdot \varrho_2}}{\varrho_1 - \varrho_2},$$

wenn $\varrho_1 = \frac{1}{r}$, $\varrho_2 = \frac{1}{t}$ gesetzt ist, als das gesuchte Minimum des Winkels γ.

Bekanntlich ist immer

$$\mathrm{tg}\ 2\,\alpha = \frac{2\ \mathrm{tg}\ \alpha}{1 - \mathrm{tg}\ \alpha^2},$$

folglich durch Substitution von $\mathrm{tg}\ \alpha = \pm\sqrt{\frac{r}{t}}$

$$\mathrm{tg}\ 2\,\alpha = -\frac{\pm 2\sqrt{rt}}{r-t},\ \text{demnach}$$

$$\mathrm{tg}\ 2\,\alpha = \mathrm{tg}\ \gamma\ \text{und}$$

$$\angle\ 2\,\alpha\ \angle\ \gamma.$$

Der kleinste Werth von γ findet für $2\,\alpha$ statt. Beachtet man die Formel bei (26), so ist auch

$$\mathrm{tg}\ \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{r}{t}} = \sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}$$

für jedes Coordinatensystem, und dasjenige Lichtbündel hat den kleinsten $\angle\ \gamma$, bei welchem $\mathrm{tg}\ \frac{\gamma}{2}$ gleich der Wurzel aus dem Quotienten der Hauptkrümmungsradien ist.

Fig.2. Als Beispiel wählen wir das Rotationsellipsoid der ausserordentlichen Strahlen in einaxigen Krystallen. Solch ein Rotationsellipsoid stelle Fig. II vor. Es sei c die halbe Rotationsaxe, a die halbe kleine Axe. So besitzt unter allen für den Punkt A möglichen Strahlenbündeln dasjenige den kleinsten $\angle\ \gamma$, für welches $\mathrm{tg}\ \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\varrho_1}{\varrho_2}}$ ist. Die Ellipse BCDE sei der Durchschnitt des Ellipsoids, parallel mit der Tangentialebne in A, deren grosse Halbaxe r sei und dessen kleinere a ist. Da nun bekanntermaassen $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{a^2}{r^2}$ ist, so besteht die Gleichung

$$\mathrm{tg}\ \frac{\gamma}{2} = \frac{a}{r}.$$

Aber nach den Gesetzen der Undulationstheorie sind a und r die Oscillationsamplituden des ordentlichen und ausserordentlichen Lichtstrahls in A, und von allen in A möglichen

Lichtbündeln hat das den kleinsten $\angle \gamma$, bei welchem $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ gleich dem Quotienten aus den Oscillationsamplituden der Bündelaxe AO ist.

Da $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} < 1$ ist, so muss $\frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ ein ächter Bruch sein; ist $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} > 1$, so nimmt man $\frac{\varrho_2}{\varrho_1}$.

Für einen Punkt des Aequators gilt auf dem Rotationsellipsoid

$$\sqrt{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}} = \frac{a}{c} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Das Minimum von γ ist um so kleiner, je kleiner $\frac{a}{c}$, d. h. je grösser die bifrangirende Energie des Krystalles ist.

§. 7. Die Brennflächen in ihrer Abhängigkeit von den Eigenschaften der Hauptwelle.

14) Der Winkel γ als Function der Hauptwelle.

Wie mit der Gleichung bei (19), verfahren wir nunmehr mit der bei (18). Der vorige Paragraph beantwortete die Frage, welche Bündel sind für einen bestimmten Punkt der Elementarwelle möglich? Die Sätze, welche wir gewannen, eigneten sich nur in besonderen Fällen dazu, aus ihnen Sätze für das ganze Strahlensystem abzuleiten, weil mit der Elementarwelle nur ihre Radien aber nicht die Strahlen in unmittelbarem Zusammenhange stehen. Bei der Untersuchung aber eines Strahlenbündels in einem Punkte der Hauptwelle wird es möglich sein, die Bündel zum Strahlensysteme, die gradlinigen Querschnitte zu Brennflächen zu vereinigen. Gleichzeitig werden wir einen Blick auf die allgemeine Theorie der Flächen werfen, für welche die Elementarwelle das erweiterte Krümmungsmaass ist. Wenn jetzt die Elementarwelle unberücksichtigt bleibt, so werden die verschiedenen Strahlensysteme untersucht, welche zu einer und derselben Hauptwelle gehören können, wenn sie in anderen und anderen Medien sich befindet.

Verschwindet in

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{T \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 S \operatorname{tg} \alpha + R}{S \operatorname{tg}^2 \alpha + (R - T) \operatorname{tg} \alpha - S} \tag{18.}$$

der Nenner rechts, so ist dem Frühern analog

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T - R \pm \sqrt{(R - T)^2 + 4S^2}}{2 S}.$$

In jedem Punkte der Hauptwelle giebt es demnach immer, aber im Allgemeinen nur eine einzige Lage, in der die Focalebnen auf einander senkrecht stehen, und unter allen Strahlensystemen, die für eine bestimmte Hauptwelle je nach der Verschiedenheit der Medien möglich sind, giebt es im Allgemeinen nur eins, dessen Brennflächen sich rechtwinklig schneiden.

Für $S = 0$, $R = T$ ist $\operatorname{tg}\alpha = \frac{0}{0}$, und bezeichnet P_1 und P_2 die Hauptkrümmungsradien, so findet alsdann

$$P_1 = P_2$$

statt, die Bedingung sphärischer Krümmung. Sphärische Hauptwellen, sie mögen in einem Medium entstanden sein, wo sie wollen, besitzen nur Brennflächen, die sich unter rechten Winkeln schneiden. Fasst man die Hauptwelle rein mathematisch als Ausgangsfläche des Strahlensystems, so kann man sagen: Ist die Ausgangsfläche eine Kugel, so haben alle, durch jedes beliebige Krümmungsmaass erzeugten Strahlensysteme Brennflächen, die sich senkrecht schneiden. Umgekehrt erzeugt man bekanntlich mit der Kugel als Krümmungsmaass zu jeder Ausgangsfläche Strahlensysteme mit einander senkrechten Krümmungsmittelpunktsflächen.

Verschwindet in dem Werthe für $\operatorname{tg}\gamma$ der Zähler, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-S \pm \sqrt{S^2 - RT}}{S}.$$

In jedem concav-convexen Punkte der Hauptwelle giebt es zwei Lichtbündel, in denen die beiden Focalebnen in eine zusammenfallen, und diese eine Focalebne geht durch die eine der beiden Asymptoten an die Indicatrix. Diese Asymptoten sind bekanntlich die graden Linien, welche auf concav-convexen Flächen möglich sind. Es giebt unter allen Strahlensystemen einer concav-convexen Hauptwelle immer zwei, die nur eine Schale als Brennfläche besitzen. Oder mathematisch ausgedrückt: Für jede concav-convexe Ausgangsfläche lassen sich zwei Krümmungsmaasse finden, welche Strahlensysteme mit einfachen Brennflächen erzeugen. Die Tangentialebnen an diese Brennflächen schneiden aus der concav-convexen Ausgangsfläche die beiden Systeme von Richtungen mit verschwindender Krümmung aus, welche auf ihr existiren.

Mit Hülfe einer Minimumsbetrachtung entstände

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{S(R+T) \pm \sqrt{(RT - S^2)\,[(R-T)^2 + 4S^2]}}{T(R-T) - 2S^2},$$

woraus folgt, dass Strahlensysteme mit solchen einfachen Brennflächen für concav-concave Hauptwellen unmöglich sind.

15) *Strahlensysteme mit imaginären Brennflächen.*

Bevor wir zur zweiten Methode übergehen, soll ein Mal umgekehrt aus der Gleichung bei (18) $\operatorname{tg}\alpha$ als Function von $\operatorname{tg}\gamma$ entwickelt werden. Das wird gestatten, einen Blick in das ziemlich versteckte Wesen der Strahlensysteme zu thun, denen die Brennflächen abgehen.

(18.) $$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{T\operatorname{tg}^2\alpha + 2S\operatorname{tg}\alpha + R}{S\operatorname{tg}^2\alpha + (R-T)\operatorname{tg}\alpha - S}$$

liefert

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(T-R)\operatorname{tg}\gamma - 2S \pm \sqrt{[(R-T)\operatorname{tg}\gamma + 2S]^2 - 4(S\operatorname{tg}\gamma + T)(R - S\operatorname{tg}\gamma)}}{2(S\operatorname{tg}\gamma + T)},$$

oder

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(T-R)\operatorname{tg}\gamma - 2S \pm \sqrt{(R+T)^2 \operatorname{tg}^2\gamma + 4(S^2-RT)(1+\operatorname{tg}^2\gamma)}}{2(S\operatorname{tg}\gamma + T)},$$

also

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(T-R)\operatorname{tg}\gamma - 2S \pm \frac{1}{\cos\gamma}\sqrt{(R+T)^2 \sin^2\gamma + 4(S^2-RT)}}{2(S\operatorname{tg}\gamma + T)}.$$

Zu jedem Werthe von γ liefert die Gleichung zwei Werthe von α. Der zweite Werth bestimmt nämlich die Lage der zweiten Focalebne. Verschwindet die Grösse unter der Wurzel, so giebt es für α nur einen Werth, und die beiden Focalebnen fallen in eine zusammen. Wann das geschieht, hängt lediglich von der Krümmung der Fläche, nicht von γ ab; denn das Vorzeichen der Grösse unter der Wurzel ist allein durch $S^2 - RT$ bedingt.

Erhält $S^2 - RT$ einen hinreichend grossen negativen Werth, so wird α imaginär, es treten die Lichtbündel mit imaginären, gradlinigen Querschnitten auf. Es sind also allein in concav-convexen Punkten solche Lichtbündel möglich. Auch darf $S^2 - RT$ sich nicht sehr der Null nähern, sondern der concav-convexe Charakter der Fläche muss stark ausgeprägt sein, namentlich wenn $\angle\,\gamma$ gross ist, wenn Strahlensysteme ohne Brennflächen möglich sein sollen. Am meisten sind sie noch verwandt den Strahlensystemen mit einschaliger Brennfläche.

Capitel IV. Die Brennflächen des Strahlensystems nach der zweiten Methode.

§. 8. *16) Die Wechselbeziehungen zwischen Haupt- und Elementarwelle.*

Die Gleichungen

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{R + S\operatorname{tg}\beta}{S + T\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{r + s\operatorname{tg}\beta}{s + t\operatorname{tg}\beta}$$

hatten die Werthe für tg γ bei (18) und (19) geliefert. In diesem Capitel soll eine Gleichung discutirt werden, die von den drei Winkeln nur noch einen enthält. Am Schlusse wollen wir auch auf die nur mit $\angle\,\alpha$ behaftete Gleichung einen flüchtigen Blick werfen. Die beiden letzten Gleichungen lassen sich in folgende Form bringen.

$$R + S(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) + T\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 0,$$

$$r + s(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) + t\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 0, \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = -\frac{Tr - Rt}{Ts - St},$$

$$\operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta = \frac{Sr - Rs}{Ts - St}.$$

Die erste Gleichung kann folgende Form annehmen

$$\operatorname{tg}\gamma = \pm \frac{\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)^2 - 4 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

Setzt man hierin jene beiden Werthe für $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$ und $\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta$ ein, so ist

$$\operatorname{tg}\gamma = \pm \frac{\sqrt{(Tr - Rt)^2 - 4\,(Sr - Rs)\,(Ts - St)}}{(Ts - St) + (Sr - Rs)}, \text{ oder}$$

(27.)

$$\operatorname{tg}\gamma = \pm \frac{\sqrt{(Tr + Rt - 2\,Ss)^2 - 4\,(S^2 - RT)\,(s^2 - rt)}}{s\,(T - R) - S\,(t - r)}.$$

Es ist diese Gleichung ganz besonders dazu geeignet, die Wechselbeziehungen zwischen Haupt- und Elementarwelle, sowie ihre gemeinsame Einwirkung auf die Strahlenbündel zu discutiren. Wiederum lässt sich der Gang der Function $\operatorname{tg}\gamma$ in doppelter Weise untersuchen, nämlich erstlich kann R, S, T variiren und r, s, t constant sein. Dann handelt es sich um einen bestimmten Punkt der Elementarwelle, während die Hauptwelle alle möglichen Gestalten annimmt. Zweitens können R, S, T constant bleiben und r, s, t variiren. Zwar vermag die Elementarwelle nicht verschiedene Gestalten anzunehmen, denn sie ist für jedes Mittel eine bestimmte, auch darf sie sich nicht drehen, denn sie hat in ihrem Mittel eine feste Lage; man kann aber das ganze Mittel sammt der in ihm fest liegenden Elementarwelle, z. B. einen Krystall, drehen und der herankommenden Hauptwelle entgegenhalten. Dieser geometrische Vorgang ist noch anschaulicher, als das Drehen der ersten Focalebne um ihre Axe.

Freilich muss man bei dieser Variation der zweiten partiellen Differentialcoefficienten mit einiger Vorsicht verfahren; denn in singulären Punkten werden diese Functionen discontinuirlich und die Gleichungen der Indicatrix verlieren ihre Gültigkeit. Glücklicherweise schneiden sich aber die Focalebnen auf beiden Flächen unter conjugirten Richtungen, und wenn die Elementarwelle ihren Dienst versagt, so nimmt man die Hauptwelle. Wegen der vollständigen Symmetrie obiger Gleichung ist es nur nöthig, die Rechnung einmal auszuführen; die Resultate lassen sich alsdann für die andere Operation sofort absehen.

§ 9. Die zweite Methode.

17) Die Hauptstrahlen.

Bevor wir eine weitere Untersuchung beginnen, soll der Fall ausgesondert werden, wo

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{0}{0}$$

ist. Es handelt sich alsdann um die Hauptstrahlen. Wir quadriren obige Gleichung

$$\operatorname{tg}^2\gamma = \frac{(Tr + Rt - 2\,Ss)^2 - 4\,(S^2 - RT)\,(s^2 - rt)}{[S\,(r - t) - s\,(R - T)]^2}$$

und setzen Zähler und Nenner für sich nach R, S, T differenzirt gleich 0. Der Nenner giebt

$$2\,[S(r - t) - s\,(R - T)]\,(r - t - s + s) = 0, \text{ oder}$$

$$S\,(r - t) - s\,(R - T) = 0;$$

Der Zähler liefert

$$2\,(Tr + Rt - 2\,Ss)\,(r + t - 2s) + 4\,(s^2 - rt)\,(R + T - 2\,S) = o.$$

Diese beiden Bedingungsgleichungen für Hauptstrahlen werden befriedigt, wenn

$$1)\quad R = 0,\ S = 0,\ T = 0,$$

oder wenn

$$2)\quad R = r,\ S = s,\ T = t.$$

Hätte man nach r, s, t differenzirt, so wäre die letzte Formel entstanden und statt der vorletzten die folgende

$$3)\quad r = 0,\ s = 0,\ t = 0,$$

welche wir sogleich wieder ausscheiden, da sie von einer ebnen Elementarwelle oder von Wendepunkten auf ihr redet, welche es nicht giebt. Die erste Gruppe von Gleichungen ist von r, s, t unabhängig, gilt also für jedes Medium. Sie besagt, dass in jedem Mittel ebne Hauptwellen nur Hauptstrahlen besitzen. Gilt die mittelste Gruppe von Gleichungen, so haben Haupt- und Elementarwelle einen Contact zweiter Ordnung, und dass alsdann Hauptstrahlen entstehen, ist einleuchtend; denn die beiden entsprechenden Punkte haben alsdann congruente Indicatrices mit conjugirten Durchmessern, von denen jedes Paar der einen Indicatrix parallel ist einem Paare in der andern. Alle durch die Bündelaxe gehenden Ebnen sind demnach Focalebnen.

Zur Erläuterung mögen folgende Fälle dienen: In homogenen Mitteln muss die Hauptwelle eine Kugel sein, um mit der Elementarwelle einen Contact zweiter Ordnung zu haben. Demnach sind in homogenen Mitteln die Strahlenbündel ebner und sphärischer Hauptwellen alle Hauptstrahlen. Die Strahlenbündel sphärischer Hauptwellen haben im Allgemeinen rechtwinklige Focalebnen, gehen aber in homogenen Mitteln in Hauptstrahlen über. Auf den 4 merkwürdigen Kreisen der Fresnel'schen Elementarwelle, wo die innere konische Refraction stattfindet, wird sie bekanntlich von einer abwickelbaren Fläche osculirt, und man kann sagen: Von den bei der innern konischen Refraction stattfindenden Strahlenbündeln sind diejenigen Hauptstrahlen, deren entsprechender Punkt auf der Hauptwelle eben ist, oder von einer Abwickelbaren osculirt wird.

Hat endlich ganz allgemein die Ausgangsfläche des Strahlensystems in einem ihrer Punkte mit dem Krümmungsmaasse einen Contact zweiter Ordnung, so besitzt sie in diesem Punkte einen Hauptstrahl. Sind beide Flächen congruent, so entsteht ein System von Hauptstrahlen mit einem Hauptbrennpunkte.

18) *Der gemeinsame Einfluss der Haupt- und Elementarwelle auf die Brennfläche des Strahlensystems.*

Lässt man, um zu erfahren, wann $\angle\,\gamma = \frac{\pi}{2}$ ist, in

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{(Tr + Rt - 2\,Ss)^2 - 4\,(S^2 - RT)\,(s^2 - rt)}}{S\,(r - t) - s\,(R - T)} \tag{27.}$$

den Nenner rechts verschwinden, so liefert

$$S(r-t) - s(R-T) = 0$$

nichts Neues; und wird durch $s = 0$, $r = t$ oder durch $S = 0$, $R = T$ befriedigt. Ob weiter $\angle \gamma$ gleich Null werden kann, hängt davon ab, ob es möglich ist

$$4(S^2 - RT)(s^2 - rt) = (Tr + Rt - 2Ss)^2$$

zu befriedigen. Da die rechte Seite stets positiv ist, so müssen $s^2 - rt$ und $S^2 - RT$ alsdann gleiches Vorzeichen haben. Also können die beiden Focalebnen nur dann zusammenfallen, wenn Haupt- und Elementarwelle gleichartige Krümmung haben, und zwar müssen beide concav-convex sein, da, wie oben gezeigt, in concav-concaven Punkten solche Lichtbündel nicht vorkommen, sondern $\angle \gamma$ daselbst einen Minimumswerth besitzt. Um dies Minimum zu finden, werde der Werth von $\operatorname{tg}^2 \gamma$ nach R, S, T differenzirt, während r, s, t constant seien.

$$[2(Tr + Rt) - 2Ss](r + t - 2s) + 4(s^2 - rt)(R + T - 2S)] \times$$
$$[S(r-t) - s(R-T)]^2 + 2[S(r-t) - s(R-T)](r-t) \times$$
$$[(Tr + Rt - 2Ss)]^2 - 4(S^2 - RT)(s^2 - rt) = 0.$$

Daraus lässt sich der gemeinsame Factor $2[S(r-t) - s(R-T)]$ absondern, welcher nichts Neues bringt.

Es handelt sich um einen bestimmten Punkt (r, s, t) der Elementarwelle, durch den die Z-Axe geht. Wie bei der ersten Methode drehe sich das Coordinatensystem um die Z-Axe so, dass $s = 0$ werde. Alsdann lässt sich die Gleichung auf folgende Form bringen:

$$(Tr - Rt)^2 - [t(r-t)R - r(r-t)T]S = 0,$$

welche für das Minimum von γ die Bedingungen liefert;

$$S = 0, \quad Tr = Rt.$$

Wäre R, S, T, constant genommen, nach r, s, t differenzirt und durch Coordinatenverlegung $S = 0$ gemacht worden, so hätte man

$$s = 0, \quad Tr = Rt$$

erhalten. Es seien wiederum die Hauptkrümmungsradien $\varrho_1 = \frac{1}{r}$, $\varrho_2 = \frac{1}{t}$, $P_1 = \frac{1}{R}$, $P_2 = \frac{1}{T}$, und $Tr = Rt$ geht in die Form über

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}.$$

Von allen in einem Punkte der Hauptwelle möglichen Lichtbündeln besitzt dasjenige den kleinsten Winkel zwischen den Focalebnen, dessen entsprechender Punkt auf der Elementarwelle Hauptkrümmungsradien besitzt, proportional den entsprechenden auf der Hauptwelle. Mit andern Worten, die Haupt- und Elementarwellen müssen in entsprechenden Punkten ähnlich sein. Von allen Strahlensystemen des Lichts, die für eine concav-concave Hauptwelle möglich sind, hat dasjenige Brennflächen, die sich unter dem kleinsten Winkel schneiden, welches durch eine der Hauptwelle ähnliche Elementarwelle erzeugt wird. Oder sind Ausgangsfläche und Krümmungsmaass ähnliche, concav-concave Flächen, so entsteht ein Strahlensystem, dessen Brennflächen sich unter dem kleinsten möglichen Winkel schneiden.

Bevor wir diesen Abschnitt verlassen, soll noch aus

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{R + S \operatorname{tg}\beta}{S + T \operatorname{tg}\beta} \text{ und}$$

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{r + s \operatorname{tg}\alpha}{s + t \operatorname{tg}\alpha}$$

tg β eliminirt werden. So entsteht

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{R\,(s + \operatorname{tg}\alpha) - S\,(r + s \operatorname{tg}\alpha)}{S\,(s + t \operatorname{tg}\alpha) - T\,(r + s \operatorname{tg}\alpha)}, \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Tr - Rt \pm \sqrt{(Rt - Tr)^2 - 4\,(St - Ts)\,(Rs - Sr)}}{2\,(St - Ts)}, \text{ geordnet}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Tr - Rt \pm \sqrt{(Rt + Tr - 2\,Ss)^2 - 4\,(S^2 - RT)\,(s^2 - rt)}}{2\,(St - Ts)}. \qquad (28.)$$

Die beiden Werthe dieser Gleichung liefern die Lage der beiden Focalebnen. Die Grösse unter der Wurzel ist der Zähler in dem Ausdruck für tg γ bei (27). Ist tg $\gamma = 0$, so verschwindet die Wurzel und die Focalebnen fallen in eine zusammen. Das Vorzeichen der Grösse unter der Wurzel hängt von $(S^2 - Rt)\,(s^2 - rt)$ ab. Es können Strahlensysteme mit imaginären Brennflächen auftreten, wenn die Krümmung der Haupt- und Elementarwelle gleichartig concav-convex ist.

Capitel V. Die Brennflächen bei den beiden konischen Refractionen.

§. 10. *19) Die innere konische Refraction.*

Es bleiben noch die Eigenschaften der Focalebnen bei den konischen Refractionen zu erforschen. Bekanntlich [1]) wird ein Lichtstrahl, wenn er auf sechs- oder viergliedrige Krystalle fällt, im Allgemeinen in zwei zerspalten, von denen der eine dem Snellius'schen Sinusgesetze folgt; der andere aber, der ausserordentliche Strahl, durch das zuerst von Huyghens aufgestellte Gesetz bestimmt wird. Diese Gesetze hielt man lange auch für zweigliedrige, eingliedrige, sowie für zwei- und eingliedrige Krystalle gültig, bis Fresnel von der Hypothese ausgehend, dass die Elasticität des schwingenden Mittels nach den drei Krystallaxen ungleich sei, darthat, dass die Elementarwelle krystallisirter Mittel weder eine Kugel noch ein Rotationsellipsoid sei, wie Huyghens wollte, sondern eine Fläche vierter Ordnung, die aus zwei Schalen bestehe und deren Berührungspunkte mit den Tangentialebnen die Richtungen der beiden Strahlen bestimme. Besitzt ein Krystall eine Richtung, um die sich seine Flächen gleichwerthig gruppiren, d. h. hat er eine krystallographische Hauptaxe, so nimmt Fresnel an, dass auch die Elasticität in allen auf die Hauptaxe senkrechten Richtungen dieselbe sei. Alsdann ist die Gleichung der Elementarwelle in zwei

[1]) Lloyd. Phil. Mag. 1833. pag. 112.

quadratische Factoren zerlegbar, deren einer die Gleichung einer Kugel, der andere die eines Rotationsellipsoides ist. So ist das Huyghens'sche Gesetz aus der allgemeinen Lösung hergeleitet. Dabei giebt es aber zwei Fälle, die Fresnel übersehen hat. Seine Elementarwelle besitzt nämlich 4 trichterförmige Vertiefungen, in deren Innerstem je ein singulärer Punkt liegt. Die Tangentialebne artet in einem solchen singulären Punkte zu einem Berührungskegel zweiten Grades aus. Ferner werden diese 4 trichterförmigen Vertiefungen von je einem Kreise umgrenzt, in welchem eine singuläre Tangentialebne die Elementarwelle berührt.

Wie schon ausgeführt, lassen sich bei den konischen Refractionen die obigen Formeln anwenden, vorausgesetzt, dass die für die etwaige Discontinuität nöthige Vorsicht angewandt werde. Auf jenen 4 Kreisen hat die innere konische Refraction ihren Sitz. Die Indicatrix ist auf den Kreisen eine Parabel, innerhalb derselben Hyperbel, ausserhalb Ellipse. Auf den Kreisen findet kein Sprung in der Fläche statt, da aber die Fläche selbst continuirlich, so sind auch ihre partiellen Differentialquotienten continuirliche Functionen, und die bisher gefundenen Sätze lassen sich vorläufig ohne Besorgniss anwenden.

Die Hauptstrahlen sind bereits oben erledigt. Zur Untersuchung der übrigen bei der inneren konischen Refraction möglichen Lichtbündel lässt sich die Formel anwenden

(19.) $$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{t\,\operatorname{tg}^2\alpha + 2s\,\operatorname{tg}\alpha + r}{s\,\operatorname{tg}^2\alpha + (r-t)\operatorname{tg}\alpha - s},$$

in welcher für

(21.) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(t-r) \pm \sqrt{(r-t)^2 + 4s^2}}{2s}$$

$\angle\,\gamma = \frac{\pi}{2}$ und für

(23.) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t}$$

$\angle\,\gamma = 0$ wurde. Durch Substitution von $s^2 - rt = 0$ in (21) entsteht

(29.) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{t}{s} = \frac{s}{r};$$

durch Substitution aber in die Formel bei (23)

(30.) $$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{s}{t} = -\frac{r}{s}.$$

Nach Dupin bestimmt $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{s}{t}$ auf jeder abwickelbaren Fläche, also auch auf den 4 Kreisen der Fresnel'schen Elementarwelle, die Richtung, in welcher die Krümmung einen unendlich grossen Krümmungsradius besitzt, und welcher alle übrigen in dem Punkte möglichen Tangenten conjugirt sind.[1]) In den Punkten der 4 Kreise sind die Richtungen, in denen die Krümmungsradien unendlich werden, die Tangenten an

[1]) Dupin, Mémoire II., art. VII und IX. Lorsque un des rayons de courbure de la surface est infini, ce seul rayon est celui d'une section unique conjuguée à toutes les autres sections normales. Ainsi toutes les droites, qu'on peut mener alors à partir du point

die Kreise. Jede Tangente an einen der Kreise hat also die Eigenschaft, dass sie sämmtlichen übrigen, in ihrem Berührungspunkte an die Fresnel'sche Elementarwelle möglichen Tangenten conjugirt ist, oder, in den Punkten des Kreises ist von zwei beliebigen conjugirten Tangenten die eine gewiss auch Tangente an den Kreis. Die Formel bei (30) giebt die Lage an, in welcher die Focalebnen zusammenfallen, und zu dieser sind gleichzeitig alle anderen durch die Bündelaxe möglichen Ebnen die zweiten Focalebnen.

Um jedoch sicher zu gehen, wollen wir bei dieser Untersuchung nicht blindlings den Rechnungen vertrauen, sondern zu den ursprünglichen physikalischen Betrachtungen und der Construction eines Lichtstrahls zurückkehren.

Die der singulären Tangentialebne ABtt an die Fresnel'sche Elementarwelle entsprechende Fig. 3. Tangentialebne berühre die Hauptwelle in C, so entsprechen dem einen Punkte C sämmtliche Punkte des Berührungskreises $\alpha\ \alpha'\ \alpha''$, und durch C sind Parallelen zu sämmtlichen, in den Berührungskreis treffenden radii vectores zu ziehen, z. B. CD $\mp$ Oα, CD' $\mp$ Oα', CD'' $\mp$ Oα'', um den Strahlenkegel der inneren konischen Refraction zu erhalten. Jede Seite des Strahlenkegels ist die Axe eines unendlich dünnen Strahlenbündels. Nicht ein Strahl theilt sich in unendlich viele Strahlen zu einem Strahlenkegel auseinander; dann wäre seine grosse Lichtintensität unerklärlich; sondern unendlich viele Strahlenbündel vereinen sich zu einem Lichtkegel. Für die Bündelaxe CD ist die erste Focalebne CD t' t' parallel der entsprechenden Ebne Oα t t, wie auch die zweite Focalebne liegen mag.

Stets gehen alle den ersten Focalebnen entsprechenden Ebnen durch die Tangenten an den Berührungskreis und hüllen den Kegel der singulären radii vectores O$\alpha\ \alpha'\ \alpha''$ ein. Die ersten Focalebnen selber hüllen den Strahlenkegel der inneren konischen Refraction C D D' D'' ein, und dabei darf die Hauptwelle eine Gestalt haben, die sie will. Die erste Schale der Brennfläche und der Strahlenkegel der inneren konischen Refraction haben die ersten Focalebnen als gemeinschaftliche Tangentialebnen, und man kann sagen, in zweiaxigen Krystallen verläuft die erste Schale jedes beliebigen Strahlensystemes in den Strahlenkegel der inneren konischen Refraction, unabhängig von der Hauptwelle, von deren Gestalt allein die Lage der zweiten Focalebnen bedingt ist.

20) Die äussere konische Refraction.

In einem singulären Punkte der Fresnel'schen Elementarwelle werden r, s, t in der That discontinuirlich. Zwar behalten die Gleichung bei (18) und die daraus gezogenen

---

de contact sur le plan tangent, sont conjuguées à la droite unique, qui au point de tangence, présente avec la surface un contact du second ordre.

$$(\mathrm{tg}\,\alpha =)\ \psi = -\frac{r}{s} = -\frac{s}{t};\ s^2 - rt = 0$$

est l'équation de condition, qui doit livrer les coëfficients du second ordre r, s, t pourque la surface ait une de ses courbures nul. Dans ce cas la ligne de courbure est osculée par une droite et la surface générale par une surface développable, dont cette droite est une arrête.

Sätze nichtsdestoweniger ihre Gültigkeit, weil sie von der Elementarwelle unabhängig sind; es soll aber doch lieber sogleich auf die physikalische Construction der Lichtstrahlen zurückgegangen werden.

Fig. 4. Im singulären Punkte S der Fresnel'schen Elementarwelle giebt es unendlich viele Tangentialebnen, das heisst, einen Berührungskegel S A B. Um nun die dem singulären radius vector OS entsprechenden Strahlen zu erhalten, muss man auch an die Hauptwelle A′ B′ C′ unendlich viele, den vorigen parallele Tangentialebnen legen, oder statt dessen einen dem Kegel SAB ähnlichen und gleichliegenden S′ A′ B′ die Hauptwelle berühren lassen. Er berühre die Hauptwelle auf der Curve A′ F′ B′ D′. So entspricht, umgekehrt wie bei der inneren konischen Refraction, dem einen singulären Punkte S der Elementarwelle eine Curve A′ F′ B′ D′ von Punkten auf der Hauptwelle. Jede Parallele zu OS durch einen der Punkte von A′ F′ B′ D ist ein Lichtstrahl, und so entspricht bei der äusseren konischen Refraction im Krystalle dem singulären radius OS ein Strahlencylinder, dessen Axe S′ O′ ⫩ S O ist. Jede Seite des Cylinders ist Axe eines unendlich dünnen Strahlenbündels. Die einer solchen auf dem Cylinder unendlich nahen Strahlen sind der Axe parallel und treffen sie also in unendlicher Ferne, es berührt also den Cylinder in jeder Seite eine Focalebne, oder die eine Schaar der Focalebnen hüllt den Strahlencylinder ein. Die eine Schale der Brennfläche läuft in den Strahlencylinder aus.

Da der Strahlencylinder die Hauptwelle in der Curve A′ F′ B′ D′ schneidet, so schneidet auch jede erste Focalebne die Hauptwelle in einer Richtung, welche an A′ F′ B′ D′ Tangente ist. Durch die dieser Tangente conjugirte Richtung muss die zweite Focalebne gehen. — In der mathematischen Einleitung §. 2 unter Nummer 3 ist folgender Satz besprochen: Wird irgend eine Fläche (die Hauptwelle A′ B′ C′) von einer abwickelbaren Fläche (dem Kegel S′ A′ B′) berührt, so sind die Tangenten an die Berührungscurve A′ F′ B′ D′ conjugirt den Seiten des Kegels. So gehen nun die ersten Focalebnen durch die Tangenten an A′ F′ B′ D′ und die zweiten durch die Seiten des Berührungskegels S′ A′ F′ B′ D′. Z. B. durch A′ S′ geht eine 2. Focalebne, deren Bündelaxe A′ E sei. A′E ⫩ S′O′, der Axe des Strahlencylinders, und S′ O′ liegt drum in der 2. Focalebene E A′ S′ O′ der Axe A′ E. So geht auch jede andere zweite Focalebne durch die Cylinderaxe S′ O′, und die zweiten Focalebnen des Strahlencylinders der äusseren konischen Refraction gehen durch seine Axe.

Denkt man sich alle Tangentialebnen eines Kegels, der immer spitzer wird und zuletzt in eine Grade ausartet, so gehen die Ebnen alle durch diese Grade. Als solche Grade lässt sich die Axe des Strahlencylinders ansehen, durch welche die 2. Focalebnen gehen, und die zweite Schale der Brennfläche läuft demnach in eine Spitze aus, welche in der Axe des Strahlencylinders endet.

So setzt sich denn die innere konische Refraction bekanntlich ausserhalb des Krystalles als Strahlencylinder fort, während mit der äusseren konischen Refraction im Innern des Krystalls ein Cylinder von unendlich dünnen Strahlenbündeln in Verbindung steht, welcher bisher noch nicht bemerkt zu sein scheint.

§. 11. Resultate.

21) *Für die Optik.*

1) Man erhält den Lichtstrahl in jedem Punkte A′ der Hauptwelle, wenn man durch A′ eine Tangentialebne legt und dieser parallel auch an die Elementarwelle eine solche, welche in A berühre. Der Strahl in A′ ist dann dem radius in A parallel.

2) Hat man auf der Haupt- und Elementar-Welle irgend ein Paar entsprechender Richtungen, so sind die ihnen conjugirten Richtungen unter sich parallel, und umgekehrt. Da für die Focalebnen die entsprechenden Richtungen zugleich sich parallel sind, so schneiden sich die Focalebnen auf der Hauptwelle; die ihnen entsprechenden Ebnen auf der Elementarwelle unter conjugirten Richtungen.

3) In homogenen Medien, sowie überall auf sphärischen Hauptwellen schneiden sich die Brennflächen senkrecht. Der Satz lässt sich auch so aussprechen: Für jede beliebige Hauptwelle giebt es nur ein Strahlensystem mit rechtwinklig sich schneidenden Brennflächen, nämlich wenn die Hauptwelle sich im homogenen Medium befindet. Für jedes Mittel giebt es nur ein solches Strahlensystem, nämlich das für die sphärische Hauptwelle.

4) Sonst schneiden sich die Schalen der Brennflächen in der Regel unter schiefen Winkeln; nur innerhalb der 4 singulären Berührungskreise auf der Fresnel'schen Elementarwelle können beide Schalen in eine zusammenfallen. Ebendaselbst können auch Lichtstrahlen ohne Brennfläche auftreten.

5) Hauptstrahlen besitzen alle ebnen Wellen, ferner in homogenen Mitteln alle sphärischen Lichtwellen, endlich sind von den bei der inneren konischen Refraction möglichen Lichtbündeln diejenigen Hauptstrahlen, deren entsprechender Punkt auf der Lichtwelle die Parabel zur Indicatrix hat.

6) Bei der inneren konischen Refraction verläuft die eine Schale der Brennfläche in den Lichtbündel-Kegel der inneren konischen Refraction; die andere Schale ist von der Gestalt der Lichtwelle abhängig. Bei der äussern konischen Refraction giebt es im Innern des Krystalles einen Strahlencylinder, welcher in die eine Schale der Brennfläche ausläuft, während die andere Schale eine Spitze hat, die in der Axe des Cylinders liegt. Die Lichtwelle ist dabei ohne Einfluss.

22) *Für die Theorie der Flächen.*

1) Den obigen Sätzen lässt sich ihr physikalischer Charakter abstreifen, wenn man die Hauptwelle mit der Ausgangsfläche des Strahlensystems vertauscht, und die Elementarwelle mit dem Namen des verallgemeinerten Gauss'schen Krümmungsmaasses belegt.

2) Unter allen in einem Punkte der Ausgangsfläche möglichen conjugirten Richtungen giebt es im Allgemeinen nur ein Paar, das seinen entsprechenden Richtungen auf dem Krümmungsmaasse parallel ist.

3) Die Strahlen stehen auf der Ausgangsfläche nur dann senkrecht, wenn entweder diese eine Kugel oder Ebne ist; oder das Krümmungsmaass eine Kugel. Die Brennflächen fallen alsdann mit den Grenzflächen der kürzesten Abstände zusammen und schneiden sich rechtwinklig.

4) Im Allgemeinen bestehen die Brennflächen aus zwei Schalen; nur für jede concav-convexe Ausgangsfläche lassen sich zwei Krümmungsmaasse finden, welche je ein Strahlensystem mit einer einschaligen Brennfläche erzeugen. Die Tangentialebnen an diese beiden einschaligen Brennflächen schneiden aus der Ausgangsfläche die beiden Systeme von Richtungen mit verschwindender Krümmung aus.

5) Für concav-concave Ausgangsflächen giebt es ein Minimum des Winkels γ, unter dem sich die Schalen schneiden, wenn nämlich tg $\frac{\gamma}{2}$ gleich der Wurzel aus dem Quotienten der Hauptkrümmungsradien auf dem Krümmungsmaasse ist.

6) Es existiren auch Strahlensysteme ohne Brennflächen, dieselben sind nur möglich, wenn Ausgangsfläche und Krümmungsmaass gleichzeitig concav-convex sind.

7) Sind Ausgangsfläche und Krümmungsmaass congruent, oder haben sie wenigstens in einzelnen Punkten congruente Krümmung, so entstehen Hauptstrahlen. Sind beide ähnlich, so ist der $\angle \gamma$, unter dem sich die Schalen der Brennfläche schneiden, ein Minimum, so dass tg $\frac{\gamma}{2}$ jetzt auch gleich der Wurzel aus dem Quotienten der Hauptkrümmungsradien auf der Ausgangsfläche ist.

Fig. I.

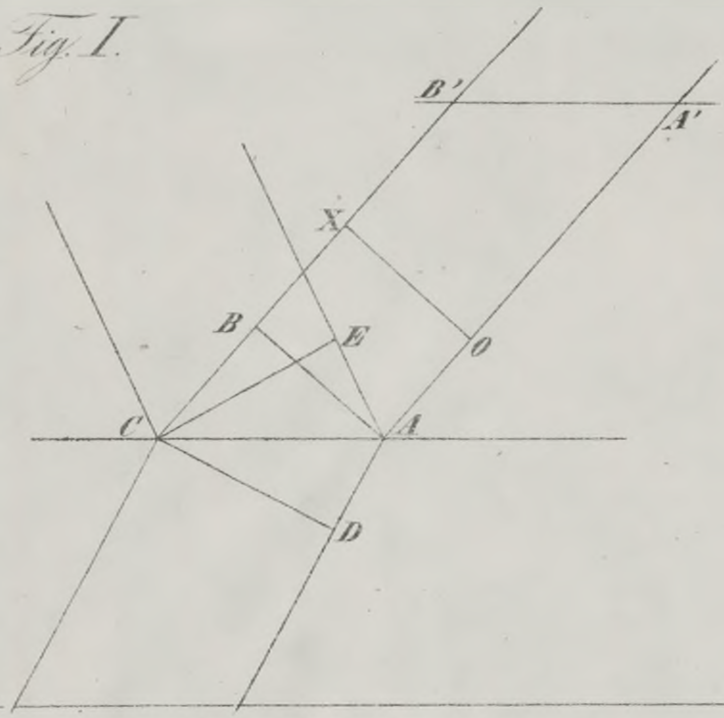


Fig. II.

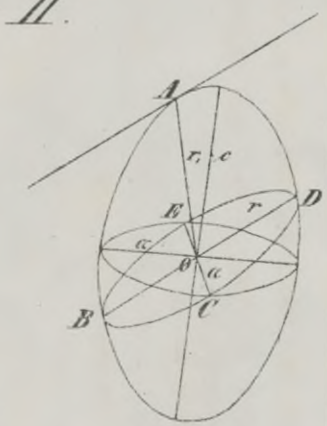


Fig. III.

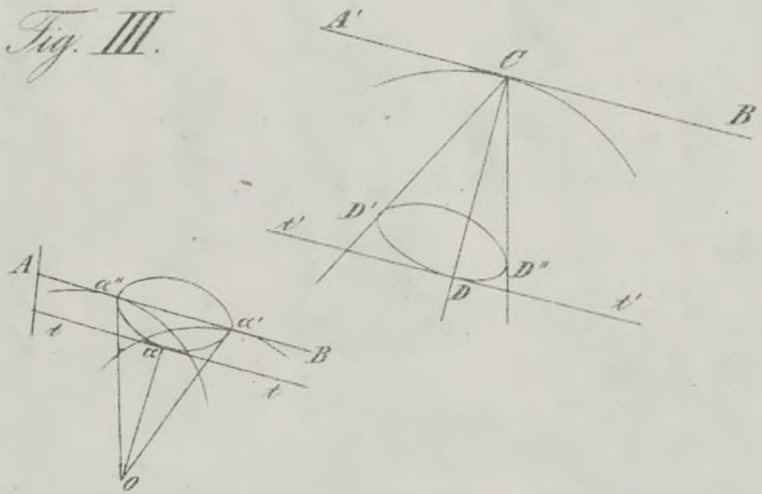
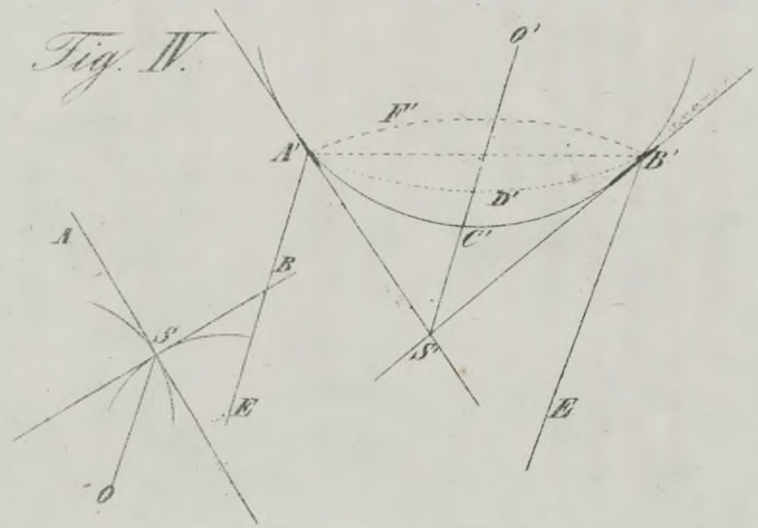


Fig. IV.



SPRAWOZDANIA SZKOLNE
Książnica Kopernikańska w Toruniu
SCHULPROGRAMME

Schul-Nachrichten

von Ostern 1863 bis Ostern 1864.

A. Lehr-Verfassung.

I. Vorschule.

Zweite Klasse.

Ordinarius: Lehrer Heeling.

Religion. Im Sommer: Biblische Erzählungen aus dem alten Testament, im Winter: Aus dem neuen Testament. Einübung der zehn Gebote, des Vaterunsers, einzelner Sprüche und Liederstrophen. 3 St. w. Heeling.

Deutsch. Lesen nach dem Schreiblesеschüler von Gittermann; Memoriren kleiner Gedichte. Täglich eine Abschrift aus dem Lesebuche; wöchentlich 2 orthographische Uebungen mit den vorgeschrittenen Schülern. 8 St. w. Heeling.

Rechnen. Die vier Grundrechnungsarten in einfach benannten Zahlen. 6 St. w. Heeling.

Schreiben. Einübung der deutschen Schrift nach Leßhafft. 5 St. w. Heeling.

Geographie. Erklärung und Besprechung leichter geographischer Begriffe, wobei besonders dasjenige berücksichtigt wurde, was den Kindern zur Anschauung gebracht werden konnte. 2 St. w. Heeling.

Gesang. Combinirt mit Kl. I. 2 St. w. Heeling.

Erste Klasse.

Ordinarius: Lehrer Schmidt II.

Religion. Biblische Geschichten aus dem alten und neuen Testament. Die fünf Hauptstücke mit der lutherischen Erklärung; Kirchenlieder. 3 St. w. Schmidt.

Deutsch. Lesen, Wiedererzählen des Gelesenen. Das Hauptwort, Eigenschaftswort, Zeitwort, Fürwort und Verhältnißwort. Memoriren geeigneter Gedichte. Wöchentlich ein Dictat, täglich eine Abschrift, theils in lateinischer, theils in deutscher Cursivschrift. 8 St. w. Schmidt.

Rechnen. Die vier Species in unbenannten und benannten Zahlen. Verbindung von Multiplication und Division. Vorübungen zur Bruchrechnung. 6 St. w. Schmidt.

Geographie. Allgemeine geographische Begriffe. Die Erdoberfläche mit Berücksichtigung der Thier- und Pflanzenwelt. 3 St. w. Schmidt.

Schreiben. Einübung der lateinischen und deutschen Schrift nach Leßhafft. 4 St. w. Schmidt.

Gesang. Einüben einstimmiger Lieder nach dem Gehör. Kenntniß der Noten und Uebungen in der C-dur-Tonleiter. 2 St. w. Heeling.

II. Realschule.

Sexta.

Ordinarius: Coet. a. Realschullehrer Bundschu; Coet. b. Realschullehrer Böhck.

Religion. Biblische Geschichte des alten Testaments. Das erste Hauptstück. Auswendiglernen von Sprüchen und Liedern. 3 St. w. Coet. a. und b. combinirt. Bundschu.

Rechnen. Wiederholung der vier Species mit benannten Zahlen, mit besonderer Rücksicht auf die Theilbarkeit der Zahlen. Die Bruchrechnungen. Vorübungen für die Regeldetri. 5 St. w. Coet. a. Bundschu, Coet. b. Hinz.

Geographie. Allgemeine Uebersicht der Land- und Wasservertheilung auf der Erde, nach Voigt's Leitfaden. 3 St. w. Coet. a. und b. Böhck.

Deutsch. Rede- und Satztheile. Einiges aus der Wortbildung. Dictate. Lesen und Wiedererzählen des Gelesenen. Anfertigung kleiner Aufsätze. Declamations-Uebungen. 5 St. w. Coet. a. Bundschu; Coet. b. Böhck.

Lateinisch. Die fünf Declinationen, die Adjectiva, Pronomina, Numeralia, die vier regelmäßigen Conjugationen nach Schulz kl. lat. Sprachlehre, §. 1 — 94. Mündliche und schriftliche Uebersetzung von §. 1 — 67 des Uebungsbuches von Schulz. 8 St. w. Coet. a. Schmidt; Coet. b. Böhck.

Zeichnen. Coet. a. und b. combinirt. Uebung der graden Linien an einfachen Figuren, welche vor den Schülern an der Wandtafel entworfen und besprochen wurden. 2 St. w. Wolff.

Schreiben. Die deutsche und lateinische Schrift in geordneter Folge nach Vorschriften an der Wandtafel und mit Benutzung der Leßhafft'schen Hefte. 3 St. w. Coet. a. und b. Hinz.

Gesang. Kenntniß der Noten. Treffübungen. Ein- und zweistimmige Lieder. 2 St. w. Schmidt II.

Quinta.

Ordinarius: Coet. a. Realschullehrer Schmidt; Coet. b. Realschullehrer Dr. Meibauer.

Religion. Biblische Geschichte des neuen Testaments. Das erste und zweite Hauptstück. Auswendiglernen von Bibelsprüchen und Kirchenliedern. 3 St. w. Coet. a. und b. comb. Hinz.

Rechnen. Wiederholung der Bruchrechnungen und Anwendung derselben auf die Regeldetri und die damit zusammenhängenden Rechnungsarten. Die Decimalbrüche. 4 St. w. Coet. a. Bundschu; Coet. b. Dr. Meibauer.

Geographie. Die Hauptgebirge und Flußnetze der fünf Erdtheile nach Voigt's Leitfaden (II. Cursus). 4 St. w. Coet. a. Bundschu; Coet. b. Dr. Krause.

Naturgeschichte. Die Wirbelthiere nach Schilling. 2 St. w. Coet. a. Schmidt; Coet. b. Hinz.

Deutsch. Der einfache und erweiterte Satz. Die Redetheile mit Ausschluß der Conjunctionen. Lese- und Vortrags-Uebungen. Dictate und Aufsätze. 4 St. w. Coet. a. Schmidt; Coet. b. Dr. Meibauer.

Lateinisch. Das Deponens, Conjugatio periphrastica, die unregelmäßigen Verba, Adverbia und Präpositionen. (F. Schulz kl. lat. Sprachlehre, §. 95 — 164.) Die entsprechenden Stücke aus F. Schulz Uebungsbuch (§. 68 — 110) mündlich und schriftlich, Exercitien und Extemporalien. 6 St. w. Coet. a. Schmidt; Coet. b. Dr. Meibauer.

Französisch. Aus dem Elementarbuche von Plötz wurden die Regeln und Vocabeln bis Lection 60 gelernt und die dazu gehörigen Uebungsstücke übersetzt und eingeübt. Exercitien, Extemporalien. 5 St. w. Coet. a. Böhck; Coet. b. Dr. Krause.

Zeichnen. Uebung der krummen Linie an einfachen symmetrischen Figuren, welche vor den Schülern an der Wandtafel entworfen und besprochen wurden. 2 St. w. Wolff.

Schreiben. Deutsche und lateinische Schrift in Sätzen nach den Leßhafft'schen Heften. Uebungen im Taktschreiben. 2 St. w. Coet. a. und b. Hinz.

Gesang. Einüben von ein-, zwei- und dreistimmigen Liedern. Kenntniß der Intervalle, Taktarten und Vorzeichnungen. Treff-Uebungen in den Dur-Tonarten. 2 St. w. Coet. a. und b. combinirt. Hinz.

Quarta.

Ordinarius: Coet. a. Realschullehrer Dr. Dubislav; Coet. b. Realschullehrer Dr. Krause.

Religion. Erklärung des dritten Hauptstückes. Die Apostelgeschichte. Lernen von Kirchenliedern. 2 St. w. Coet. a. und b. Dr. Dubislav.

Mathematik. a) Arithmetik. Decimalbrüche. Proportionen und deren Anwendung. Aufgaben aus der Regeldetri, Gesellschafts-, Mischungs-, Zins-, Rabattrechnung. 2 St. w. Coet. a. Dr. Kleinert; Coet. b. Dr. Meibauer.

b) Geometrie. Nach Kambly's Leitfaden die Planimetrie bis zum Pythagoreischen Lehrsatze und den Erweiterungen desselben. Schriftliche Ausarbeitungen einzelner Aufgaben. 4 St. w. Coet. a. Dr. Kleinert; Coet. b. Dr. Meibauer.

Naturgeschichte. Im Sommer: Beschreibung und Einordnung von häufiger vorkommenden Pflanzen nach dem Linné'schen System. Im Winter: Die wirbellosen Thiere nach Schilling. 2 St. w. Coet. a und b. Hinz.

Geschichte. Griechische Geschichte bis zum Tode Alexanders des Großen. Römische Geschichte bis Titus. 2 St. w. Coet. a. Dr. Dubislav. Coet. b. Dr. Meibauer.

Geographie. Politische Geographie der außereuropäischen Länder nebst Wiederholung der physischen, nach Voigt's Leitfaden. 2 St. w. Coet. a. Dr. Dubislav; Coet. b. Dr. Meibauer.

Deutsch. Im Anschluß an das Lesebuch von Gude und Gittermann (obere Stufe) wurde der verbundene und gefügte Satz erläutert; Hauptregeln der Interpunction. Uebungen im Lesen und im Angeben des Inhalts gelesener Stücke. Memoriren von Gedichten. Aufsätze. 3 St. w. Coet. a. Dr. Dubislav; Coet. b. Dr. Krause.

Latein. a) Grammatik nach der kleinen Sprachlehre von F. Schulz. Wiederholung des Pensums von Sexta und Quinta mit Erweiterungen. Die unregelmäßigen Verba composita; die Adverbien und Conjunctionen; Gebrauch des Inf.; die attributive Participial-Construction, Gebrauch der abl. absoluti; Construction der Städtenamen. Aus dem Uebungsbuche von F. Schulz wurden von den §§. 111—117, 121, 123—136, 139—141, 197—205, 206—210 die lateinischen und deutschen Stücke nach Auswahl mündlich und schriftlich übersetzt. Exercitien und Extemporalien. Memoriren einzelner Stücke. 6 St. w. Coet. a. Dr. Dubislav; Coet. b. Dr. Krause.

Französisch. Wiederholung des Pensums der Quinta nach Plötz's Elementar-Grammatik I. Cursus. Die Stücke aus den Lectionen 61—105 wurden größtentheils übersetzt; Extemporalien; einzelne Lesestücke wurden memorirt; Einübung des dazu gehörigen grammatischen Pensums. 5 St. w. Coet. a. Hetzel; Coet. b. Dr. Krause.

Zeichnen. Weitere Uebung der graden und krummen Linien an passenden Vorlegeblättern. Copiren leichter Köpfe, Theile des menschlichen Körpers, Ornamente und Landschaften, mit besonderer Berücksichtigung der Contour. 2 St. w. Wolff.

Gesang. Kenntniß der gebräuchlichsten Tonarten und Einübung zwei- und dreistimmiger Lieder. 1 St. w. Coet. a. und b. combinirt. Bundschu.

Untertertia.

Ordinarius: Coet. a. Oberlehrer Dr. Schultz; Coet. b. Realschullehrer Dr. Böning.

Religion. Biblische Geschichte des alten und neuen Testaments. Wiederholung des lutherischen Katechismus. Erklärung der Sonntags-Evangelien. Lernen von Kirchenliedern. 2 St. w. Coet. a. und b. Schmidt.

Mathematik. a) Arithmetik. Die 4 Species der Buchstabenrechnung. Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel. Algebraische Gleichungen mit Einer Unbekannten. Proportionen und Gleichungen angewendet auf bürgerliche Rechnungsarten. Extemporalien und Ausarbeitungen. 3 St. w. Coet. a. Dr. Schultz; Coet. b. Dr. Kleinert.

b. Geometrie. Nach Kambly: Repetition des Cursus von Quarta. Kreislehre. Vergleichung des Flächeninhaltes, Verwandlung, Theilung und Ausmessung gradliniger Figuren Extemporalien und Ausarbeitungen. 3 St. w. Coet. a. Dr. Schultz; Coet. b. Dr. Kleinert.

Naturgeschichte. Im Sommer: Botanik. Beschreibung von häufiger vorkommenden Pflanzen und Einordnung derselben in die natürlichen Pflanzenfamilien. Wiederholung des Linné'schen Systems. Excursionen. Im Winter: Zoologie nach Schilling. 2 St. w. Coet. a. Schmidt; Coet. b. Dr. Kleinert.

Geschichte. Die Deutschen, von ihrem Eintreten in die Geschichte bis zum westphälischen Frieden. In Verbindung hiermit die Begebenheiten von weltgeschichtlicher Bedeutung bei den andern Völkern. 2 St. w. Coet. a. Dr. Dubislav; Coet. b. Dr. Schultz.

Geographie. Deutschland nebst seinen jetzigen und früheren Nebenländern in physischer und politischer Beziehung; Preußen speiceller auch in Bezug auf Producte, Gewerbe, Handel, Anstalten für Bildung und Vertheidigung, Denkwürdigkeiten. 2 St. w. Dr. Schultz.

Deutsch. Der zusammengesetzte Satz, besonders mit Rücksicht auf die Conjunctionen und die Interpunction, und mit Hinweisung auf Uebereinstimmung im Lateinischen und Französischen. Lectüre aus dem Vaterländischen Lesebuche von Gude und Gittermann, obere Stufe. Vorträge und Aufsätze. 3 St. w. Coet. a. Dr. Schultz; Coet. b. Dr. Böning.

Lateinisch. Vollständige Satzlehre und Wiederholung der Formenlehre nach F. Schultz, Grammatik und Uebungsbuch. Lectüre aus Nepos. Memoriren einzelner Lesestücke. Exercitien und Extemporalien. 5 St. w. Coet. a. Dr. Schultz; Coet. b. Dr. Böning.

Französisch. Die wichtigsten unregelmäßigen Verba nach dem Elementarbuche von Plötz mit den Uebungssätzen und angehängten Lesestücken. Wiederholung der gesammten Elementar-Grammatik, verbunden mit Einübung der Vocabeln zu den Uebungssätzen und Lesestücken des Elementarbuchs. Memoriren einzelner Lesestücke. Exercitien und Extemporalien. 4 St. w. Coet. a. Dr. Dubislav; Coet. b. Dr. Böning.

Zeichnen. Weitere Uebung im Copiren leichter Köpfe, Ornamente und Landschaften, mit besonderer Berücksichtigung des Schattens. 2 St. w. Wolff.

Gesang. Vide Prima.

Obertertia.

Ordinarius: Oberlehrer Hetzel.

Religion. Bibelkunde nebst Erklärung von einzelnen Abschnitten des neuen Testamentes (Bergpredigt, Parabeln). Memoriren von Kirchenliedern. 2 St. w. Dr. Weigand.

Mathematik. a) Arithmetik. Repetition der Buchstabenrechnung und der Ausziehung von Quadrat- und Cubikwurzeln. Gleichungen des ersten und zweiten Grades mit einer und mehreren Unbekannten. Arithmetische und geometrische Progressionen. 3 St. w. Lehmann.

b) Geometrie. Repetition der Pensen von Quarta und Unter-Tertia. Proportionslehre. Planimetrie nach Kambly's Elementar-Mathematik von Seite 60 an. Proportionalität und Aehnlichkeit der Figuren. Kreisberechnung. 3 St. w. Lehmann.

Naturgeschichte. Im Sommer: Systematische Uebersicht des Pflanzenreichs, mit Berücksichtigung der exotischen, für die Cultur wichtigen Pflanzen. Im Winter: Mineralogie, zugleich als Einleitung in die Physik und Chemie. 2 St. w. Dr. Kleinert.

Geschichte. Deutsche Geschichte und brandenburg-preußische Geschichte vom westphälischen Frieden an; Repetition bis 1648. 2 St. w. Hetzel.

Geographie. Europa, specieller Deutschland und Preußen, nach Voigt's Leitfaden. 2 St. w. Hetzel.

Deutsch. Das Verbum und Nomen im einfachen und einfach erweiterten Satz. Gelesen und erklärt wurde aus Echtermeyer's Auswahl deutscher Gedichte. Aufsätze und Declamationsübungen. 3 St. w. Hetzel.

Latein. Repetition der Formenlehre. Das Nomen und das Hauptsächlichste aus der Syntax des Verbum nach F. Schultz's Grammatik. Lectüre aus Weidemann: Caesar de b. g. II., 1—35; IV., 1—15; V., 26—52. 5 St. w. Hetzel.

Französisch. Grammatik nach Plötz II., Abschnitt 1—4 inclusive, mit Berücksichtigung des lateinischen und englischen Sprachgebrauchs. — Exercitien und Extemporalien. Sprechübungen. Gelesen wurde aus Herrig's La France littéraire: Montesquieu, Lamartine, Fénelon, Voltaire, Buffon. 4 St. w. Dr. Böning.

Englisch. Grammatik nach W. Zimmermann I., §. 1—75, mit Rücksicht auf den französischen und lateinischen Sprachgebrauch. Lesestücke 13, 14, 15. Exercitien und Extemporalien. Sprachübungen. 4 St. w. Dr. Böning.

Zeichnen. a) Im practischen Zeichnen: Anfänge des Plan- und Bauzeichnens. Copiren von schwereren Landschaften, Köpfen, Arabesken und Ornamenten mit der Estompe, Feder und mit Anwendung von zwei Kreiden.

Daneben im Winter: b) im theoretischen Zeichnen: Die Lehre vom Grund- und Aufriß. Die Anfänge der Perspective. 2 St. w. Wolff.

Gesang. Vide Prima.

Secunda.

Ordinarius: Oberlehrer Dr. Weigand.

Religion. Vide Prima.

Mathematik. Algebraische Geometrie und Construction der Formeln. — Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen. Ebene Trigonometrie. 5 St. w. Lehmann.

Physik. Experimental-Physik; Magnetismus und Elektricität im Sommer, Akustik und Optik im Winter. 2 St. w. Lehmann.

Chemie. Im Sommer: Die Metalloide; im Winter: Die Leichtmetalle und das Wichtigste von den Schwermetallen; die Verbindungen der Elemente mit Sauerstoff, Chlor, Jod, Schwefel, Wasserstoff. Die stöchiometrischen Gesetze und Aufgaben. 2 St. w. Dr. Kleinert.

Naturgeschichte. Das Wichtigste aus der Anatomie und Physiologie der Pflanzen im Sommer, der Thiere im Winter. 2 St. w. Dr. Kleinert.

Geschichte. Im Sommer: Griechische, im Winter: Römische Geschichte. 3 St. w. Der Director.

Deutsch. Erklärung von Herder's Cid, von Klopstock'schen Oden, von philosophischen und culturhistorischen Gedichten Schiller's. — Anleitung zum Disponiren. — Ueber das Wesen der epischen und lyrischen Poesie. Das Wichtigste aus der Metrik. Aufsätze. 3 St. w. Dr. Weigand.

Lateinisch. Gelesen wurde aus Livius, liber XXI. und von lib. XXII. cap. 44—61. — Ferner aus Virgils Aeneis lib. II., 1— 267. — Wiederholung der Syntax. — Exercitien und Extemporalien. 4 St. w. Der Director.

Französisch. Schullectüre aus Herrig und Burguy's: La France littéraire: Sévigné, Chateaubriand, Pascal, J. B. Rousseau, Gresset, Chénier. Privatlectüre aus Göbel's Bibliothek (Thiers, Bonaparte en Egypte; Petites pièces de théâtre; Barante, Histoire de Jeanne d'Arc), in französischer Sprache controlirt. Syntax nach Plötz, Cursus II.: Wortstellung, Zeiten, Subjonctif, Participien. Retroversionen. Exercitien und Extemporalien. 4 St. w. Dr. Weigand.

Englisch. Gelesen wurde aus Herrig's Classical Authors: Fourth period: The Wits of Queen Anne's reign. II. The Essayists. Grammatik nach W. Zimmermann, Lection 26 bis Ende. Retroversionen. Exercitien. Extemporalien. 3 St. w. Dr. Weigand.

Zeichnen. a) Practisches Zeichnen, wie in Ober-Tertia.

Daneben im Winter: b) Im theoretischen Zeichnen: Fortsetzung der Perspective: Die Lehre von den perspectivischen Maßstäben. Vom perspectivischen Kreiszeichnen, verbunden mit der Zeichnung der verschiedenen Bögen und Gewölbe. Die Accidentalperspective. Behandlung der steigenden und fallenden Ebnen. Die Lehre von den Spiegelungen. 2 St. w. Wolff.

Gesang. Vide Prima.

Prima.

Ordinarius: Oberlehrer Lehmann.

Religion. Combinirt mit Secunda. Im Sommer: Glaubenslehre, zweiter Theil; im Winter: Geschichte der christlichen Kirche, erster Theil. 2 St. w. Serno.

Mathematik. Theilbarkeit der Zahlen, Kettenbrüche. Combinationslehre. Rechnen, mit Anschluß der Zinses-Zinsrechnung und der Berechnung der Tafeln. Cubische und höhere Gleichungen, diophantische Gleichungen. Repetition der Geometrie. 5 St. w. Lehmann.

Physik. Magnetismus und Elektricität. Akustik und Optik. 2 St. w. Lehmann.

Chemie. Im Sommer: Die Schwermetalle, mit besonderer Berücksichtigung der metallurgischen Processe. Im Winter: Ausgewählte Capitel aus der organischen Chemie. 2 St. w. Dr. Kleinert.

Naturgeschichte. Im Sommer: Geographie; im Winter: Mathematische Geographie. 1 St. w. Dr Kleinert.

Geschichte. Neuere Geschichte; Repetition der alten und mittleren Geschichte; geographische Repetitionen. 3 St. w. Hetzel.

Deutsch. Das Wichtigste aus der Poetik und Rhetorik. Besprechung Lessing'scher, Herder-scher, Schiller'scher Abhandlungen. Literaturgeschichte von der ersten schlesischen Dichtergruppe bis zu Göthe's Tode. Correctur der Aufsätze. 3 St. w. Der Director.

Lateinisch. Gelesen wurde eine Auswahl aus Briefen des Cicero, und größere Abschnitte aus de republica und de senectute; außerdem Mehreres aus Tibull und aus Virgil's Georgica. Repetitionen einzelner Theile der Grammatik mit Rücksicht auf den französischen und englischen Sprachgebrauch. 3 St. w. Der Director.

Französisch. Schullectüre aus Herrig und Burguy's la France littéraire: Bossuet, Montaigne. Privatlectüre, in französischer Sprache controlirt, aus Göbel's Bibliothek: Paganel, Histoire de Frédéric le Grand; Corneille, le Cid. Repetition von Plötz, C. II. in französischer Sprache. Synonymen. Mündliche Extemporalien, Exercitien, Aufsätze. 4 St. w. Dr. Weigand.

Englisch. Schullectüre: Shakespeare, Richard III. Aus Herrig's Classical Authors: White, Keats, Bloomfield, Barbauld, Byron. Privatlectüre, in englischer Sprache besprochen, aus Herrig: die Historiker der 4. und 5. Periode. Mündliche Uebersetzung der Uebungsstücke aus W. Zimmermann, Grammatik, C. II. Synonymen. Extemporalien, Exercitien, Aufsätze. 4 St. w. Dr. Weigand.

Zeichnen. a) Im practischen Zeichnen: Zeichnen nach Gypsmodellen. Practische Anwendung der perspectivischen Regeln durch Aufnahme geigneter Baulichkeiten der Stadt. b) Im theoretischen Zeichnen: Repetition der Perspective. Geometrisches Zeichnen, namentlich Lösung solcher Aufgaben aus der zeichnenden Geometrie, welche bei den verschiedenen Bauhandwerkern am häufigsten zur Anwendung kommen. Die Projection, die Schattenconstruction. 2 St. w. Wolff.

Gesang. Die Schüler der oberen Klassen waren mit den geübteren der untern zur ersten Gesangklasse vereinigt. Eingeübt wurden kirchliche Chor-Gesänge aus der Sammlung von Krauß und Weber, vierstimmige Choräle, eine Motette von Rungenhagen, Einiges aus Haydn's Jahreszeiten, und mit den geübteren Schülern einzelne Soloquartette für Männerstimmen, für Sopran und Alt, und für gemischten Chor. 2 St. w. Bundschu.

Vertheilung der Lectionen im Winter-Semester 18$\frac{63}{64}$.

Lehrer.	Prima. Ord. Lehmann.	Secunda. Ord. Dr. Weigand.	Ober-Tertia. Ord. Hetzel.	Unter-Tertia Coet. a. Ord. Dr. Schultz.	Unter-Tertia Coet. b. Ord. Dr. Boening.	Quarta Coet. a. Ord. Dr. Dubislav.	Quarta Coet. b. Ord. Dr. Krause.	Quinta Coet. a. Ord. Schmidt.	Quinta Coet. b. Ord. Dr. Meibauer.	Sexta Coet. a. Ord. Bundschu.	Sexta Coet. b. Ord. Böhck.	Vorschule. Klasse I. Ord. Schmidt II.	Vorschule. Klasse II. Ord. Heeling.	Summa.
1. Der Director	3 Deutsch. 3 Latein.	4 Latein. 3 Geschichte.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	13
2. Oberlehrer Lehmann	5 Mathematik. 3 Physik.	5 Mathematik. 2 Physik.	6 Mathematik.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	21
3. Oberlehrer Dr. Weigand	4 Französisch. 3 Englisch.	3 Deutsch. 3 Englisch. 4 Französisch.	2 Religion.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	19
4. Oberlehrer Hetzel	3 Geschichte.	—	3 Deutsch. 5 Latein. 2 Geschichte. 2 Geographie.	—	—	5 Franösisch.	—	—	—	—	—	—	—	20
5. Oberlehrer Dr. Schultz	—	—	—	3 Deutsch. 5 Latein. 6 Mathematik. 2 Geographie.	2 Geschichte. 2 Geographie.	—	—	—	—	—	—	—	—	20
6. Realschullehrer Dr. Kleinert . . .	2 Chemie. 1 Naturgesch.	2 Chemie. 2 Naturgesch.	2 Naturgesch.	—	6 Mathematik. 2 Naturgesch.	6 Mathematik.	—	—	—	—	—	—	—	23
7. Realschullehrer Dr. Boening . . .	—	—	4 Französisch. 4 Englisch.	—	3 Deutsch. 5 Latein. 4 Französisch.	—	—	—	—	—	—	—	—	20
8. Realschullehrer Dr. Dubislav . . .	—	—	—	4 Französisch. 2 Geschichte.	—	2 Religion mit Coet. b. comb. 3 Deutsch. 6 Latein. 4 Gesch. u. Geogr.	—	—	—	—	—	—	—	21
9. Realschullehrer Dr. Krause	—	—	—	—	—	—	3 Deutsch. 6 Latein. 5 Französisch.	—	4 Geographie. 5 Französisch.	—	—	—	—	23
10. Realschullehrer Böhck	—	—	—	—	—	—	—	5 Französisch	—	3 Geographie.	5 Deutsch. 8 Latein. 3 Geographie.	—	—	24
11. Realschullehrer Dr. Meibauer. . .	—	—	—	—	—	—	2 Geschichte. 2 Geographie. 6 Mathematik.	—	4 Deutsch. 4 Rechnen. 6 Latein.	—	—	—	—	24
12. Realschullehrer Schmidt I.	—	—	—	2 Naturgesch. 2 Religion mit Coet. b. comb.	—	—	—	2 Naturgesch. 4 Deutsch. 6 Latein.	—	8 Latein.	—	—	—	24
13. Realschullehrer Bundschu	2 Erste Gesangklasse mit Secunda, Ober-Tertia, u. Unter-Tertia Coet. a. u. b. comb.	—	—	—	—	1 Gesang mit Quarta b. comb.	—	4 Rechnen. 4 Geographie.	—	3 Religion mit Coet. b. comb. 5 Deutsch. 5 Rechnen.	—	—	—	24
14. Realschullehrer Wolff	3 Zeichnen.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen.	2 Zeichnen mit Sexta b. comb.	—	—	—	21
15. Lehrer Hinz	—	—	—	—	—	2 Naturgesch.	2 Naturgesch.	3 Religion mit Coet. b. comb. 2 Schreiben. 2 Gesang mit Quinta b. comb.	2 Naturgesch. 2 Schreiben.	3 Schreiben.	5 Rechnen. 3 Schreiben.	—	—	26
16. Lehrer Schmidt II.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2 Gesang mit Coet. b. comb.	—	3 Religion. 8 Deutsch. 6 Rechnen. 3 Geographie. 4 Schreiben.	—	26
17. Lehrer Heeling	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3 Religion. 8 Deutsch. 6 Rechnen. 2 Geographie. 5 Schreiben. 2 Gesang mit Kl. I. comb.	26
18. Prediger Serno	2 Religion mit Secunda comb.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
19. Vicar Zbierski	—	2 Religion (kath.) mit Tertia combinirt.	—	—	—	2 Religion (kath.) mit Sexta und Quinta comb.	—	—	—	—	—	2 Religion (kath.) mit Klasse II. combinirt.	—	6
20. Lehrer Betkowski	6 Polnisch in drei Abtheilungen.	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6

Katholischer Religions-Unterricht.

a. Vorschule.

Klasse I. und II. combinirt.

Auswendiglernen der allgemeinen Katechismus-Tabelle. Erklärung des Gebetes des Herrn und des englischen Grußes. Ausgewählte biblische Erzählungen aus dem alten Testamente. 2 St. w. Zbierski.

b. Realschule.

Zweite Abtheilung: Sexta, Quinta und Quarta combinirt.

Glaubenslehre. Biblische Geschichte des alten und neuen Testaments. 2 St. w. Zbierski.

Erste Abtheilung: Tertia und Secunda combinirt.

Von den heiligen Sacramenten. Sittenlehre. Kirchengeschichte von Constantin den Großen bis auf Carl den Großen. 2 St. w. Zbierski.

Unterricht im Polnischen.

Abtheilung III.

Lesen in der naùka czytania von Rakowicz. Auswendiglernen von Vocabeln; kleine Dictate. Uebungen in der Orthographie. 2 St. w.

Abtheilung II.

Genusendung des Substantivs und Adjectivs, die Declination, Zahlwörter, Fürwörter, Conjugation der Hilfszeitwörter und der regelmäßigen Zeitwörter. Ueberseßungen aus Fritz Elementarbuch, Cursus I. Exercitien. 2 St. w.

Abtheilung I.

Sämmtliche Redetheile und die Conjugation sämmtlicher Verba. Mündliches Wiedererzählen in polnischer Sprache des in derselben Sprache Gelesenen aus Przyjaciel dzieci von Lukaszewicz. Leichte freie Ausarbeitungen. 2 St. w. Betkowski.

Turn-Unterricht.

Der Turn-Unterricht wurde im Sommer in 4 Abtheilungen vom Oberlehrer Hetzel und Dr. Kleinert ertheilt; im Winter übte eine Auswahl der besten Turner unter Leitung des Oberlehrer Hetzel.

Themata der Aufsätze in den drei oberen Klassen von Ostern 1862 bis Ostern 1863.

Ober-Tertia.

1) Meer und Wüste (Klassenarbeit). 2) Eine Schwalbe macht keinen Sommer. 3) Werth der Gesundheit. 4) Achilleus und Hector. 5) Ducaten werden beschnitten, Pfennige nicht. 6) Ein Erlebniß in den Ferien (Brief). 7) Lebensgeschichte eines Pferdes. 8) Cäsar's Kampf mit den Nerviern. 9) Laubwald und Nadelwald. 10) Mein künftiger Beruf (Brief). 11) Entschlossen, beherzt, muthig, kühn, verwegen, tollkühn. 12) Cäsar's Kampf mit den Usipetern und Tenchtherern (Klassenarbeit).

Secunda.

1) Meer und Wüste. 2) Das Kartenspiel (ein Gespräch). 3) Der Ort der Handlung in Vossen's Idylle: Der 70. Geburtstag. 4) Bericht über die Privatlectüre. 5) Undank ist der Welt Lohn. 6) Geordnete Zusammenstellung der Sentenzen aus Herder's Cid. 7) „In dir ein edler Sclave ist, dem du die Freiheit schuldig bist" (Rede). 8) Erklärung der Klopstock'schen Ode: Friedrich V. 9) Abendgebet am Bord eines Schiffes aus Esménard: la Navigation, in Blankverse übersetzt. 10) Distichen über gegebene Stoffe. 11) „An's Vaterland, an's theure, schließ' dich an, das halte fest mit deinem ganzen Herzen" (Rede). 12) Die Kunst, das menschliche Leben zu verlängern.

Prima.

1) Die Kunst zu schweigen. 2) Die Intoleranz. 3) Inwiefern kann von dem Aeußern eines Menschen auf sein Inneres geschlossen werden. 4) a. Hamilkar und Hannibal, die Feinde Rom's, nach kritischer Vergleichung von Livius mit Nepos. 4) b. Uebers. von Virg. Aen. II., 195 bis 233 in Hexametern. 5) Der Mensch bedarf des Menschen. 6) Die Gefahren der Cultur. 7) Das Verhältniß der Kunst zur Moral, besprochen nach Schiller's Abhandlung: „Ueber den Grund unseres Vergnügens an tragischen Gegenständen". 8) Quid sit futurum cras, fuge quaerere. Hor. 9) Charakteristik Cicero's, nach einer Auswahl aus seinen Schriften gegeben. 10) Bericht über die Privatlectüre. 11) Verhältniß der Dichtkunst zu den übrigen schönen Künsten. 12) Ueber die Langeweile.

Französische Themata.

1) La guerre des deux Roses en Angleterre. 2) Plaidoyer de Socrate. 3) Principaux faits de l'histoire d'Allemagne sous la maison de Saxe. 4) La vie de Luther. 5) Analyse des premiers deux actes de Richard III. par Shakespeare. 6) Le distrait. 7) Analyse de l'Oraison funèbre de Henriette Anne d'Angleterre par Bossuet (ou de Cuvier, les Révolutions du globe). 8) La vie privée de Charles I., roi d'Angleterre.

Englische Themata.

1) Frederic the Great before his accession to the throne. 2) The first Silesian war. 3) The second Silesian war. 4) The ten years of peace precedent to the war of seven years. 5) The first three years of the seven years' war. 6) The last four years of the seven years' war. 7) The earliest things I can remember. 8) History of Prussia from 1763—1786.

Themata bei dem Abiturienten-Examen zu Michaelis 1863.

1. **Im Deutschen:** Der Mensch bedarf des Menschen.
2. **Im Englischen:** Exercitium: The villas of Cicero.
3. **Im Französischen:** La vie de Luther.
4. **In der Mathematik:** 1) Es werden 2 Zahlen gesucht, für welche die Summe der Quadrate, durch die Summe der Zahlen selber dividirt, einen Quotienten und Rest giebt, deren Summe gleich der Summe der gesuchten Zahlen, deren Differenz aber gleich der kleineren Zahl ist. Außerdem übertrifft die größere Zahl das Quadrat der kleineren um 1. 2) Wenn 2 Sehnen eines Kreises sich rechtwinklig schneiden, so ist die Summe der Quadrate über den 4 Abschnitten gleich dem Quadrate über dem Durchmesser. 3) Die 3 Seiten eines sphärischen Dreiecks sind gegeben; man soll die Höhen berechnen. 4) Auf der Oberfläche einer Kugel sind 2 Punkte gegeben; es soll durch diese Punkte eine Ebne so gelegt werden, daß der entstehende Kugelkreis eine gegebene Größe hat.

5. **In der Physik:** 1) Wie hoch und wie weit kann, abgesehen vom Widerstande der Luft, möglicherweise eine Kugel fliegen, die mit 500′ Geschwindigkeit abgeschossen wird? 2) Es soll erläutert werden, inwiefern Gegenstände nicht immer an dem Orte sich befinden, an dem sie uns erscheinen.

6. **In der Chemie:** Es sollen die hauptsächlichsten chemischen Processe angegeben werden, auf welchen die Gewinnung des Roheisens aus Thon- und Kieselerde haltigen Eisenerzen beruht.

Themata bei dem Abiturienten-Examen zu Ostern 1864.

1. **Im Deutschen:** Das Verhältniß der Dichtkunst zu den übrigen schönen Künsten.
2. **Im Englischen:** The reformation of England.
3. **Im Französischen:** Exercitium.
4. **In der Mathematik:** 1) Von einer geometrischen Reihe ist das Anfangsglied a und der Exponent q gegeben. Man finde diejenige Anzahl n der Glieder, deren Summe der 6fachen Summe der reciproken Glieder gleich ist. 2) Zwischen den beiden Achsen eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems werden rechtwinklige Dreiecke so construirt, daß die Spitze des rechten Winkels auf der X-Achse, ein zweiter Eckpunkt aber stets in dem festen Punkte B der Y-Achse liege, und daß außerdem die Katheten das Verhältniß $m : n$ bilden. Den geometrischen Ort für die dritte Ecke der Dreiecke zu finden. 3) In einem Kreise, dessen Radius $= r$, sind 2 parallele Sehnen in einem Abstande $= h$ gezogen und schließen 2 Bogen von je α^0 ein. Welche Entfernung vom Mittelpunkte haben diese Sehnen? Beispiel: $r = 10'$; $h = 6'$; $\alpha = 57^0\ 42'\ 35{,}6''$. — 4) In welcher Entfernung vom Mittelpunkt einer Kugel muß eine Ebne gelegt werden, wenn das durch dieselbe begrenzte Segment halb so groß sein soll, als der zugehörige Kugelsector?
5. **In der Physik:** 1) Es soll aus Messingblech von der Dicke 0,5‴ und vom specifischen Gewichte = 8 eine hohle Kugel verfertigt werden, welche bis zur Hälfte im Wasser einsinkt. Wie groß muß der äußere Halbmesser sein? 2) Welche Wirkungen bringt der Erdmagnetismus hervor?
6. **In der Chemie:** Welches Verhalten zeigen die organischen Verbindungen gegen O, A, NO_5 und SO_3?

B. Verordnungen der Behörden.

Vom 1. April 1863. Uebersendung von 2 Exemplaren des Abdrucks der Urkunde über die Errichtung des Denkmals Sr. Majestät des Königs Friedrich Wilhelm III.

Vom 4. April. Empfehlung des von dem Maler, Professor K. H. Hermann herausgegebenen Werkes: Geschichte des deutschen Volks in 15 Bildern.

Vom 14. April. Der Lectionsplan der Realschule auf das Schuljahr von Ostern 1863 bis 1864 wird genehmigt.

Vom 24. April. Die Tabellen über die Personal-Veränderungen in den Lehrer-Collegien sind von jetzt ab für den Zeitraum des Kalenderjahres einzureichen.

Vom 27. Mai. Mittheilung, die Betheiligung eines Turnlehrers der Anstalt an einem Cursus in der Königlichen Central-Turn-Anstalt betreffend.

Vom 19. Juni. Durch die Theilnahme der Realschule erster Ordnung zu Ruhrort an dem Programmen-Austausche erhöht sich die Zahl der an das Provinzial-Schulcollegium einzusendenden Programme auf 246 + 6.

Vom 13. Juli. In den Berichten, die Gewährung von Unterstützungen an Lehrer oder Beamte der höheren Schulanstalten betreffend, ist Aeußerung nicht bloß über die Bedürftigkeit sondern auch über die Würdigkeit der Vorgeschlagenen nothwendig.

Vom 27. Juli. Mittheilung des Revisions-Gutachtens der Königlich wissenschaftlichen Prüfungs-Commission für Schlesien und Posen über die Abiturientenarbeiten zu Ostern 1863.

Vom 29. Juli. Die Vereidigung und Einführung des fünften ordentlichen Lehrers, Albert Böhck, sowie des sechsten ordentlichen Lehrers, Dr. Rudolf Ottomar Meibauer, wird angeordnet.

Vom 24. August. Mittheilung der Modificirung von Berechtigungen, welche den Realschulen zweiter Ordnung in Bezug auf den Königlichen Postdienst zustehen.

Vom 27. August. Das Verfahren, welches bei Uebersendung der Schulprogramme an die Behörden beobachtet werden soll, betreffend.

Vom 6. October. Die vom Oberlehrer Herm. Schütz zu Minden herausgegebenen „Charakterbilder aus der englischen Geschichte" und „Charakterbilder aus der neueren Geschichte" werden zur Einführung empfohlen.

Vom 11. October. Mittheilung der Ministerial-Erlasse, das Verhalten der Beamten und Lehrer bei den Wahlen zum Abgeordnetenhause betreffend.

Vom 9. November. Uebersendung des neuen Reglements für den Unterricht im Zeichnen auf den Gymnasien und Realschulen vom 2. October d. J.

Vom 11. November. Mittheilung des Ministerial-Rescripts vom 24. September d. J., die Beschränkung des Unterrichts in den Vorschulen der höheren Lehranstalten auf den allgemeinen Elementar-Unterricht und die Ausschließung fremder Sprachen von demselben betreffend. Die deutsche Sprache ist selbstverständlich auch in Bezug auf Schüler polnischer Nationalität nicht als fremde Sprache zu betrachten.

Vom 8. December. Der Magistrat ordnet an, daß in Bezug auf Schüler, welche die Anstalt verlassen wollen, die Abmeldung bei dem Director bis zum ersten Tage des folgenden Schulquartals erfolgt sein muß, widrigenfalls die Verpflichtung zur Zahlung des Schulgeldes für das folgende Quartal bestehen bleibt.

Vom 23. December. Durch Beitritt der höheren Bürgerschule zu Neustadt-Eberswalde und des Progymnasiums zu Freienwalde a/O., sowie des Gymnasiums zu Inowraclaw zum Programm-Tauschverbande erhöht sich die Zahl der dem Provinzial-Schul-Collegium einzusendenden Programme auf 249 + 6.

Vom 30. December. Mittheilung des Ministerial-Rescripts vom 21. December d. J., durch welches namentlich das Verfahren bei Abgangszeugnissen für die nach dem ersten halben Jahre aus Secunda der Gymnasien und Realschulen erster Ordnung abgehenden Schüler genauer bestimmt wird.

Vom 6. Januar 1864. Mittheilung des Revisions-Gutachtens der Königlich wissenschaftlichen Prüfungs-Commission für Schlesien und Posen über die Abiturienten-Arbeiten zu Michaelis 1863.

Vom 9. Februar. Bei Anträgen auf Einführung neuer Lehrbücher in den höheren Lehranstalten ist neben der Einsendung eines Exemplars derselben auch die Angabe des Preises erforderlich.

C. Chronik.

In die durch das Ausscheiden des Herrn Wentzlaff (Ostern 1862) erledigte Lehrerstelle wurde zu Ostern 1863 Herr Albert Böhck berufen, bisher Hilfslehrer an der Realschule in Barmen.

Das Stiftungsfest der Anstalt wurde durch gemeinschaftlichen Auszug nach Rinkau am 11. Mai gefeiert.

Wegen großer Hitze fiel der Unterricht für die Nachmittagsstunden am 12., 23., 25. Juni, sowie am 28., 31. August und am 1. September aus.

Die Ordnung der Vorträge bei dem Weihnachts-Actus, welcher am 21. December stattfand, war folgende:

Erster Theil: 1) Rede des Primaners Jäger: La correspondance de Frédéric le Grand.

2) Rede des Primaners Weigand: The character of the hero in Shakespeare's Richard III.
3) Rede des Primaners Gutzeit: Wie drückt sich der Charakter der Franzosen in ihrer Sprache aus?

Zweiter Theil. 1) Erste Gesangklasse: Frühlingschor aus Haydn's Jahreszeiten, 2 Quartette für gemischten Chor. 2) Barkow (IVa.) Choral von Leuthen (Besser). 3) Mallon (Vorschulkl. I.), Junker und Bauer (Pfeffel). 4) Szalla (IIIa.), Rana rupta et bos (Phädrus). 5) Haronski (Va.), Der Bauerknabe in der Stadt (Castelli). 6) Berndes (IIIb.), Le chien du louvre (Delavigne). 7) Fieberg (IIIa.), Das Kind der Sorge (Herder). 8) Haronski: Der Erlkönig (Göthe); Geisler II.: Le roi des aulnes (übersetzt von Lepas); Timpf: Erlking (übersetzt von W. Scott); Schlieper: Król Dembow (aus IIIa). 9) Der Rangstreit der Thiere von Lessing, von Wiecklow, Kubies, Oestreich, Levy, Sehmsdorf, Loßmann, Werner, Stadie, Hirsch, Eichstädt (aus IVa.). 10) Erste Gesangklasse: Chor aus Pretiosa, 2 Solo-Quartetts. 11) Liebermann I. und II.: Aesop und der Wanderer (VIa.). 12) Reimarus (II.), Gerber (II.), Neumann (II.): Scene aus Wilhelm Tell (1, 3). 13) Dumas (VIb.), Der Klabautermann (Kopisch). 14) Just (I.), Baraniecki (I.), Schmidt (I.): Scene aus Molières Misanthrope (I., 2). 15) Nawrocki (IIIa.), Unstern (Uhland). 16) Jeloneck (Va), Affe und Katzen (Nicolai). 17) Gutzeit (I.), Donner (I.), Schmidt (I.): Scene aus Henri the fifth (IV, 1). 18) Erste Gesangklasse: 3 Quartette für Chor.

Die patriotische Gedächtnißfeier der Leipziger Schlacht fand am 19. October in der Aula der Anstalt statt. Herr Oberlehrer Hetzel hielt die Festrede.

Der Geburtstag Sr. Majestät des Königs wurde am 22. März durch eine Festrede des Herrn Oberlehrer Dr. Weigand in der Aula gefeiert.

D. Statistische Nachrichten.

Die Zahl der Schüler betrug im Winter-Semester 18$\frac{62}{63}$ 532, von denen sich 422 in der Realschule und 110 in der Vorschule befanden. Im Laufe des Jahres sind abgegangen 125, unter denen uns der Ober-Tertianer Paul Sieg am 20. Januar d. J. durch einen plötzlichen Tod in Folge eines Gehirnschlages entrissen wurde; neu aufgenommen wurden 156, so daß die Gesammtzahl der Schüler, welche im Winter-Semester 18$\frac{63}{64}$ die Anstalt besuchten, 563 betrug, von denen sich 436 in der Realschule, 127 in der Vorschule befanden. Sie waren in folgender Weise vertheilt:

a. Realschule.

Klasse.	Gesammtzahl.	Evangelische.	Katholische.	Jüdischer Religion.	Deutscher Abkunft.	Polnischer Abkunft.	Einheimische.	Auswärtige.
Prima	11	11	—	—	11	—	7	4
Secunda	16	13	1	2	16	—	10	6
Obertertia	42	33	3	6	40	2	21	21
Untertertia Coet. a.	32	25	1	6	32	—	21	11
Untertertia Coet. b.	31	22	2	7	30	1	13	18
Quarta Coet. a.	41	30	6	5	39	2	28	13
Quarta Coet. b.	50	40	2	8	49	1	31	19
Quinta Coet. a.	60	47	1	12	59	1	37	23
Quinta Coet. b.	40	30	—	10	40	—	30	10
Sexta Coet. a.	59	48	1	10	58	1	46	13
Sexta Coet. b.	54	42	1	11	53	1	37	17
	436	341	18	77	427	9	281	155

b. Vorschule.

Klasse.	Gesammtzahl.	Evangelische.	Katholische.	Jüdischer Religion.	Deutscher Abkunft.	Polnischer Abkunft.	Einheimische.	Auswärtige.
Klasse I.	69	59	4	6	65	4	62	7
Klasse II.	58	51	1	6	58	—	55	3
	127	110	5	12	123	4	117	10
Gesammtzahl	563	451	23	89	550	13	398	165

Bei der Abiturienten-Prüfung zu Michaelis 1863, welche unter dem Vorsitz des Herrn Provinzial-Schulraths, Consistorialrath D. Mehring und in Vertretung der städtischen Schuldeputation durch Herrn Consistorialrath D. Romberg abgehalten wurde, erhielt das Zeugniß der Reife: „genügend bestanden": Hermann Stadion, aus Poln. Crone gebürtig, 20 Jahre alt, evangelischer Confession, 2 Jahre auf der Anstalt, 2 Jahre in Prima, zum Militär.

Bei der Abiturienten-Prüfung zu Ostern 1864 erhielten das Zeugniß der Reife:

Berthold Gutzeit, aus Hahnfier bei Schloppe gebürtig, evangelischer Confession, 9 Jahre auf der Anstalt, 2 Jahre in Prima, will studiren.

Hugo Jäger, aus Inowraclaw gebürtig, evangelischer Confession, 20 Jahre alt, 12 Jahre auf der Anstalt, 2 Jahre in Prima, zum Militär.

Gustav Weigand, aus Mühlhausen gebürtig, evangelischer Confession, 17 Jahre alt, 10 Jahre auf der Anstalt, 2 Jahre in Prima, Beruf noch nicht bestimmt.

Gutzeit erhielt das Prädicat: vorzüglich, Jäger: genügend, Weigand: gut.

E. Lehr-Apparate.

Für die Lehrerbibliothek wurden u. A. angeschafft: Bopp, Vocalismus; Gruppe, Deutsche Uebersetzerkunst; Grimm, Personenwechsel in der Rede: Les anciens poëtes de la France; van Dalen, englische Grammatik in Beispielen; Diez, etymologisches Wörterbuch der romanischen Sprachen; Curtius, Grundzüge der griechischen Etymologie; Spengel, artium scriptores; Ammonius de differentia adfinium vocabulorum ed. Valcken; Lotze, Mikrokosmus; Mätzner, englische Grammatik 2; Carlyle, Geschichte Friedrichs des Großen; Häußer, deutsche Geschichte; Kirchhoff, Untersuchungen über das Sonnenspectrum 2; Schilling's großer naturgeschichtlicher Atlas; Kayser, Deutschlands Schmetterlinge; Gandtner und Junghans, Sammlung mathematischer Aufgaben; Fortsetzungen von Stiehl, Centralblatt für den Unterricht; Poggendorf, Annalen der Physik und Chemie; Steinthal und Lazarus, Zeitschrift für Völkerpsychologie und Sprachwissenschaft; Herrig, Archiv für neuere Sprachen u. A. mehr.

Geschenkt wurde vom Hohen Ministerium der geistlichen-, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten: Denkmale deutscher Baukunst von Dr. Ernst Förster, Bd. 8; Rudolf Köpke, die Gründung der K. Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin; Vormbaum, Sammlung evangelischer Schulordnungen Th. II.; von Herrn Dr. Kleinert, ein reichhaltiges Herbarium.

Für das physikalische und chemische Kabinet wurden im verflossenen Schuljahre nur die nöthigen Ergänzungen und einige Reparaturen besorgt; die Lehrmittel für den geographischen, Gesang- und Zeichenunterricht, ebenso die Schülerbibliothek und die Schulbücher zum Gebrauch für ärmere Schüler sind angemessen vermehrt worden.

Oeffentliche Prüfung.

Montag, den 21. März 1864.

Morgens von 8 Uhr ab.

Untertertia b.	Französisch: Dr. Böning.
Untertertia a.	Geographie: Dr. Schultz.
Obertertia.	Geschichte: Hetzel.
	Naturgeschichte: Kleinert.
Secunda.	Englisch: Dr. Weigand.
	Mathematik: Lehmann.
Prima.	Französisch: Dr. Weigand.
	Lateinisch: Der Director.

Entlassung der Abiturienten durch den Director.

Gesang der ersten Singeklasse: Motette von Rungenhagen.

Nachmittags von 2 Uhr ab.

Vorschulklasse II.	Religion: Heeling.
Vorschulklasse I.	Rechnen: Schmidt II.
Sexta b.	Latein: Böhck.
Sexta a.	Rechnen: Bundschu.
Quinta b.	Naturgeschichte: Hinz.
Quinta a.	Deutsch: Schmidt I.
Quarta b.	Französisch: Dr. Krause.
Quarta a.	Geographie: Dr. Dubislav.

Probezeichnungen liegen im Zeichensaale aus.

Der Unterricht für das Winter-Semester wird Mittwoch, den 23. März, geschlossen. Die Censuren müssen nach den Ferien den Herren Klassenordinarien mit den Unterschriften der Eltern oder Vormünder vorgezeigt werden. Nachversetzungen finden nicht statt.

Der Unterricht für das Sommer-Semester beginnt Donnerstag, den 7. April, früh 9 Uhr.

Zur Prüfung und Inscription neuer Zöglinge wird der Unterzeichnete am 5. und 6. April, Vormittags von 9—12 Uhr, im Schullocale zu sprechen sein. Für auswärtige Eltern wird bemerkt, daß zu den Bedingungen der Aufnahme die Wahl einer Pension gehört, welche die Zustimmung des Directors hat.

G. Gerber.

03857